

Strutture dati - Parte 2

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

22 maggio 2024

Una struttura dati flessibile

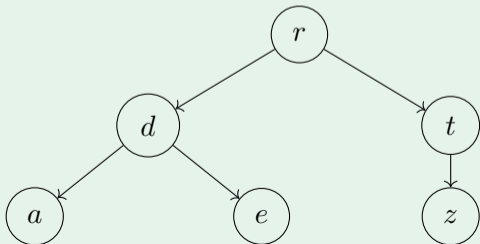
- Una struttura dati versatile è il cosiddetto *albero*
- Ne abbiamo già fatto uso informalmente (limite inferiore complessità dell'ordinamento per confronto)
- In estrema sintesi:
 - Un albero è costituito da un insieme di nodi e uno di archi che li collegano
 - Ogni nodo ha al più un arco entrante, ma un numero arbitrario di archi uscenti
- Gli alberi sono una rappresentazione efficiente per insiemi di dati ordinati

Alberi

Definizione

Un albero A è una coppia (\mathbf{V}, \mathbf{E}) dove \mathbf{V} è un insieme di nodi e \mathbf{E} un insieme di archi (coppie di nodi ordinate). Ogni nodo può apparire un'unica volta come destinazione di un arco (= secondo elemento della coppia). Non sono possibili cicli.

Graficamente



- $\mathbf{V} = \{r, a, d, e, t, z\}$
- $\mathbf{E} = \{(r, d), (r, t), (d, a), (d, e), (t, z)\}$

Nomenclatura

- **Radice:** É l'unico nodo dell'albero privo di un arco entrante
- **Foglia:** Un nodo senza archi uscenti
- **Padre** (o genitore): di un nodo n : il nodo da cui l'arco entrante in n ha origine
- **Figlio** (o discendente): di un nodo n : il nodo in cui uno degli archi uscenti da n termina
- Un albero in cui ogni nodo ha al più due figli è detto *albero binario*
- **Livello:** distanza, in numero di archi, di un nodo dalla radice
- **Albero completo:** un albero in cui tutti i livelli hanno tutti i nodi tranne l'ultimo
 - i nodi dell'ultimo livello sono impacchettati da sinistra

Alberi binari

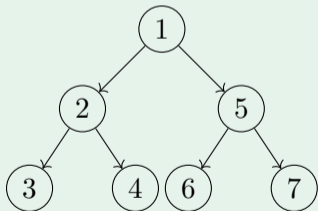
In pseudocodice

- Ci occuperemo di alberi binari (= ogni padre ha 2 figli)
- É utile dare una definizione ricorsiva di albero:
 - Un albero è formato da un nodo radice a cui sono collegati due alberi, il sottoalbero destro e quello sinistro
 - Un albero può essere vuoto (NIL)
- Le azioni sull'albero indicizzeranno i nodi con una chiave
 - Simile a quanto fatto per le tabelle hash, la chiave è un intero
- Dato un nodo A :
 - $A.left$ è il riferimento al figlio sinistro, $A.right$ al destro
 - $A.p$ è il riferimento al padre, $A.key$ è la chiave
- Ogni albero A ha un riferimento $A.root$ alla radice
 - $A.p$ è NIL solo per la radice

Stoccaggio con struttura dati implicita

Alberi binari stoccati con un vettore

- Un albero può essere materializzato in memoria naturalmente con una struttura basata su puntatori
- Alternativamente è possibile utilizzare un vettore per contenere le chiavi (efficiente se l'albero è completo)



1	2	5	3	4	6	7
---	---	---	---	---	---	---

- La radice dell'albero è stoccata nella prima posizione del vettore
- Dato un nodo contenuto in posizione i il suo figlio sx è in posizione $2i + 1$, il dx in $2i + 2$ (contando da 0 le pos.
- Il padre del nodo stoccato in posizione i (se esiste) si trova in posizione $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$

Visita di un albero

- Su di un albero è possibile effettuare operazioni di inserimento, ricerca e cancellazione di nodi come sulle altre strutture dati
- L'operazione caratteristica degli alberi è il cosiddetto *attraversamento* o *visita* per enumerare le chiavi contenute
- La definizione naturale degli algoritmi di visita è ricorsiva
- Il fattore discriminante tra le diverse strategie è l'*ordine* in cui i nodi vengono visitati

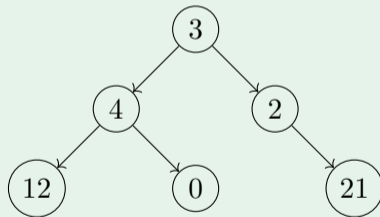
Visita di un albero

Visita *in-ordine* (*in-order*)

- Nella visita in ordine si visita prima il sottoalbero sx, quindi la radice, infine il sottoalbero dx

INORDER(*T*)

- 1 INORDER(*T.left*)
- 2 PRINT(*T.key*)
- 3 INORDER(*T.right*)
- 4 **return**



- INORDER dell'esempio stampa: 12, 4, 0, 3, 2, 21
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

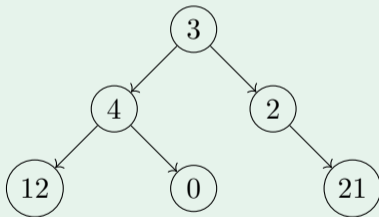
Visita di un albero

Visita anticipata (preorder)

- Nella visita in ordine si visita prima la radice, quindi il sottoalbero sx, infine il sottoalbero dx

PREORDER(T)

```
1 PRINT( $T.key$ )
2 PREORDER( $T.left$ )
3 PREORDER( $T.right$ )
4 return
```



- PREORDER dell'esempio stampa: 3, 4, 12, 0, 2, 21
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

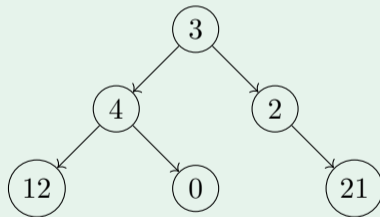
Visita di un albero

Visita *posticipata* (*postorder*)

- Nella visita in ordine si visita prima il sottoalbero sx, poi il sottoalbero dx e infine la radice

POSTORDER(T)

- 1 POSTORDER($T.left$)
- 2 POSTORDER($T.right$)
- 3 PRINT($T.key$)
- 4 **return**



- POSTORDER dell'esempio stampa: 12, 0, 4, 21, 2, 3
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

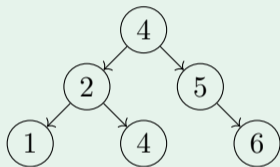
Alberi binari di ricerca (BST)

Definizione

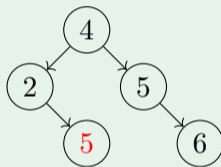
- Uno degli usi più comuni degli alberi binari è utilizzare quelli per cui è valida una data relazione tra le chiavi
- Un albero binario è un *albero binario di ricerca* se per ogni suo nodo x valgono:
 - Se y è contenuto nel sottoalbero sinistro di x , $y.key \leq x.key$
 - Se y è contenuto nel sottoalbero destro di x , $y.key \geq x.key$
- Inserimenti e cancellazioni devono preservare la proprietà
- Una visita in-ordine del BST stampa le chiavi in ordine

Alberi binari di ricerca (BST)

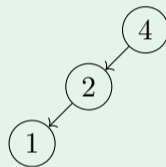
Esempi



É un BST



NON É un BST



É un BST

Nota

- Cambiare la condizione sui valori di chiave rimuovendo la possibilità che siano uguali rende gli elementi del BST unici

Operazioni su BST

Ricerca

- La struttura dei BST li rende naturali candidati per una ricerca efficace degli elementi per chiave

RICERCA(T, x)

```
1  if  $T = \text{NIL}$  or  $T.\text{key} = x.\text{key}$ 
2      return  $T$ 
3  if  $T.\text{key} < x.\text{key}$ 
4      return RICERCA( $T.\text{right}, x$ )
5  else return RICERCA( $T.\text{left}, x$ )
6
```

- Complessità: $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza dell'albero
- Nel caso ottimo (albero "ben bilanciato") diventa $\mathcal{O}(\log(n))$
- Nel caso pessimo (albero degenerare in lista) è $\mathcal{O}(n)$

Operazioni su BST

Minimo e massimo

- L'elemento con chiave minima (massima) è quello più a sinistra (destra) del BST

MIN(T)

```
1  $cur \leftarrow T$ 
2 while  $cur.left \neq NIL$ 
3      $cur \leftarrow cur.left$ 
4 return  $cur$ 
```

MAX(T)

```
1  $cur \leftarrow T$ 
2 while  $cur.right \neq NIL$ 
3      $cur \leftarrow cur.right$ 
4 return  $cur$ 
```

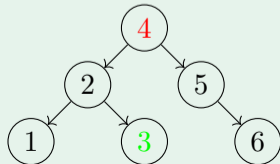
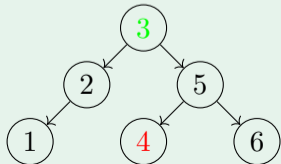
- Complessità: $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza dell'albero

Operazioni su BST

Successore

- Il successore di un elemento x è l'elemento y con la più piccola chiave $y.key > x.key$ presente nel BST
- Nel cercarlo sono possibili due casi:
 - 1 Il sottoalbero dx di x non è vuoto: il successore è il minimo di quel sottoalbero
 - 2 Il sottoalbero dx di x è vuoto: il successore è il progenitore più prossimo a x per cui x appare nel suo sottoalbero sx

Esempi: Successore di 3



Operazioni su BST

Successore

- Lo pseudocodice per la ricerca del successore è il seguente:

SUCCESSORE(x)

```
1  if  $x.right \neq \text{NIL}$ 
2      return MIN( $x.right$ )
3   $y \leftarrow x.p$ 
4  while  $y \neq \text{NIL}$  and  $y.right = x$ 
5       $x \leftarrow y$ 
6       $y \leftarrow y.p$ 
7  return  $y$ 
```

- Complessità nel caso 1: la stessa del calcolo del minimo: $\mathcal{O}(h)$
- Complessità nel caso 2: caso pessimo, x è la foglia più distante dalla radice, $\mathcal{O}(h)$

Operazioni su BST

Inserimento – Struttura

- L'inserimento di un nuovo elemento deve rispettare la proprietà fondamentale del BST
- Assunzione: non vogliamo che il BST contenga duplicati
- Idea: Cerco l'elemento che voglio inserire nel BST, non lo trovo, lo inserisco al posto del NIL trovato.
- Unica accortezza rispetto al codice della ricerca: tenere traccia dell'ultimo nodo non-NIL per poter inserire correttamente l'elemento

Operazioni su BST

Inserimento – Pseudocodice

INSERISCI(T, x)

```
1   $pre \leftarrow NIL$ 
2   $cur \leftarrow T.root$ 
3  while  $cur \neq NIL$ 
4       $pre \leftarrow cur$ 
5      if  $x.key < cur.key$ 
6           $cur \leftarrow cur.left$ 
7      else  $cur \leftarrow cur.right$ 
8   $x.p \leftarrow pre$ 
9  if  $pre = NIL$ 
10      $T.root \leftarrow x$ 
11 elseif  $x.key < pre.key$ 
12      $pre.left \leftarrow x$ 
13 else  $pre.right \leftarrow x$ 
```

- Le righe 3–7 effettuano la ricerca della posizione di inserimento nell'albero
- Le righe 8–13 effettuano l'inserimento vero e proprio
- Complessità: la stessa della ricerca $\mathcal{O}(h)$ più una porzione a tempo costante (inserimento)

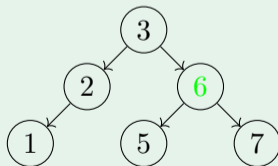
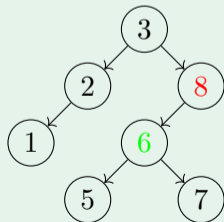
Operazioni su BST

Cancellazione – Struttura – 1

- La strategia di cancellazione di un elemento da un BST dipende dal numero di figli dell'elemento in questione

Caso 1 L'elemento non ha figli: è sufficiente eliminarlo dall'albero deallocandolo e impostando il puntatore del padre a NIL

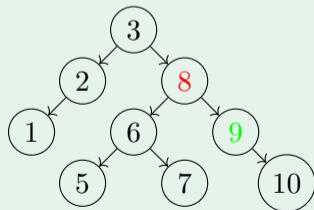
Caso 2 L'elemento ha un figlio: L'elemento viene sostituito dal figlio nel suo ruolo nell'albero



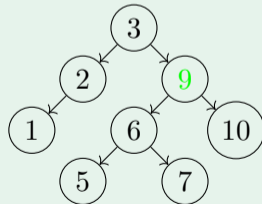
Operazioni su BST

Cancellazione – Struttura – 2

- **Caso 3** L'elemento ha due figli: copio il valore del suo successore su di esso ed elimino il successore
- Il successore s di un elemento con due figli x non ha mai il figlio sx f : si avrebbe $x.key < f.key < s.key$, ma questo è impossibile per definizione di successore



Prima



Dopo

Operazioni su BST

Cancellazione – Pseudocodice

CANCELLA(T, x)

```
1  if  $x.left = \text{NIL}$  or  $x.right = \text{NIL}$ 
2      $da\_canc \leftarrow x$ 
3  else  $da\_canc \leftarrow \text{SUCCESSORE}(x)$ 
4  if  $da\_canc.left \neq \text{NIL}$ 
5      $sottoa \leftarrow da\_canc.left$ 
6  else  $sottoa \leftarrow da\_canc.right$ 
7  if  $sottoa \neq \text{NIL}$ 
8      $sottoa.p \leftarrow da\_canc.p$ 
9  if  $da\_canc.p = \text{NIL}$ 
10      $T.root \leftarrow sottoa$ 
11 elseif  $da\_canc = da\_canc.p.left$ 
12      $da\_canc.p.left \leftarrow sottoa$ 
13 else  $da\_canc.p.right \leftarrow sottoa$ 
14 if  $da\_canc \neq x$ 
15      $x.key \leftarrow da\_canc.key$ 
16 FREE( $da\_canc$ )
```

- Le righe 1–3 individuano il nodo da cancellare
- Le righe 4–8 individuano il sottoalbero da spostare e correggono il riferimento al padre
- Le righe 9–13 correggono il riferimento del padre
- Le righe 14–15 copiano il valore della chiave

Sommario

- Tutte le operazioni sono $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza del BST
- Nel migliore dei casi $h = \log(n)$ (albero completo o quasi completo), nel peggiore $h = n$ (lista)
- É critico per avere buone prestazioni mantenere il BST il più possibile vicino al caso ottimo
- Si può dimostrare che l'altezza attesa di un BST è $\mathcal{O}(\log(n))$ se le chiavi inserite hanno distribuzione uniforme
- Volendo un metodo deterministico ci serve una definizione di albero *ben bilanciato*

Albero bilanciato

Vicinanza all'albero completo

- Intuitivamente, vogliamo che la distanza delle foglie dalla radice sia limitata superiormente, per tutte le foglie
- Una definizione operativa (Adelson-Velskii e Landis, 1962)
 - Un albero è bilanciato se, per ogni nodo, le altezze dei due sottoalberi differiscono al più di 1
- Adelson-Velskii e Landis proposero, insieme alla definizione, una modifica ai BST ed ai metodi per accedervi in grado di tenerli bilanciati (alberi AVL)
- Vediamo un'ottimizzazione degli alberi AVL che sacrifica parte del bilanciamento per ottenere inserimenti/cancellazioni più efficienti: gli alberi rosso-neri (red-black trees, RB-trees)
 - Sia la perdita in bilanciamento, che il guadagno sono costanti

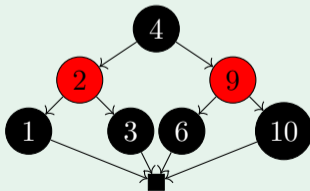
Struttura e definizione

- Un albero rosso-nero è un BST i cui nodi sono dotati di un attributo aggiuntivo, detto *colore* $\in \{\text{rosso}, \text{nero}\}$, e soddisfacente le seguenti 5 proprietà:
 - 1 Ogni nodo è rosso o nero
 - 2 La radice è nera
 - 3 Le foglie sono nere
 - 4 I figli di un nodo rosso sono entrambi neri
 - 5 Per ogni nodo dell'albero, tutti i cammini dai suoi discendenti alle foglie contenute nei suoi sottoalberi hanno lo stesso numero di nodi neri
- Chiamiamo, per comodità, altezza nera (black height) di un nodo x il valore $bh(x)$ pari al numero di nodi neri, escluso x se è il caso, nel percorso che va da x alle foglie

Alberi rosso-neri

Convenzioni

- I dati sono mantenuti unicamente nei nodi interni, le foglie sono tutte NIL
- Per semplicità, tutte le foglie sono fisicamente rappresentate da un singolo nodo, il cui unico riferimento `T.nil` è conservato nella struttura dati
- Il padre del nodo radice punta anch'esso a `T.nil`



Alberi rosso-neri

Azioni sugli alberi rosso-neri

- Tutte le operazioni che non vanno a modificare la struttura dell'albero sono identiche ai BST: RICERCA, MIN, MAX, SUCCESSORE, PREDECESSORE
- Le operazioni di INSERISCI e CANCELLA hanno necessità di mantenere le proprietà degli alberi rosso-neri
 - Idea di massima: opero come se si trattasse di un BST generico, dopodichè compenso le eventuali violazioni
- É necessario essere in grado di ri-bilanciare l'albero con modifiche solamente locali (no ricostruzione dell'albero)

Alberi rosso-neri

Teorema (Proprietà di buon bilanciamento)

Un albero RB con n nodi interni ha altezza massima $2 \log(n + 1)$

Dimostrazione - 1

- Dim. che un sottoalbero con radice x ha almeno $2^{bh(x)} - 1$ nodi interni, per induzione sull'altezza del sottoalbero
 - Caso base (altezza 0): x è una foglia, il sottoalbero contiene almeno $2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ nodi interni
 - Passo: dato x , entrambi i suoi figli hanno altezza nera $bh(x)$ o $bh(x) - 1$. Dato che l'altezza dei figli è minore di quella di x (per hp. ind.) i loro sottoalberi hanno almeno $2^{bh(x)-1} - 1$ nodi interni. L'albero radicato in x contiene quindi almeno $2^{bh(x)-1} - 1 + 2^{bh(x)-1} - 1 + 2 = 2^{bh(x)}$ nodi

Alberi rosso-neri

Dimostrazione.

- Per la proprietà 4, almeno metà dei nodi su un qualunque percorso radice-foglia sono neri
- L'altezza nera della radice è almeno $\frac{h}{2}$; per quanto detto prima il sottoalbero radicato in essa contiene almeno $2^{\frac{h}{2}} - 1$ nodi
- $n \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1$, risolvendo per $h \rightarrow h \leq 2 \log(n + 1)$ ■

Conseguenze

- Le operazioni che restano invariate tra RB-trees e BST (RICERCA, MAX, MIN, SUCCESSORE) sono $\mathcal{O}(2 \log(n + 1))$
- Se riesco a riparare le violazioni in maniera efficiente ho anche INSERISCI e CANCELLA) in $\mathcal{O}(2 \log(n + 1))$

Alberi rosso-neri

Rotazione

Operazione locale a due nodi di un BST che cambia il livello a cui sono situati due nodi senza violare la proprietà BST

LEFTROTATE(T, x) \rightarrow

$$l(\rho) = i - 1$$

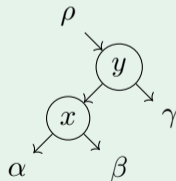
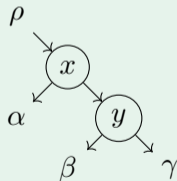
$$l(x) = i$$

$$l(\alpha) = i + 1$$

$$l(y) = i + 1$$

$$l(\beta) = i + 2$$

$$l(\gamma) = i + 2$$



$$l(\rho) = i - 1$$

$$l(x) = i + 1$$

$$l(\alpha) = i + 2$$

$$l(y) = i$$

$$l(\beta) = i + 2$$

$$l(\gamma) = i + 1$$

\leftarrow RIGHTROTATE(T, y)

Rotazioni

Pseudocodice

LEFTROTATE(T, x)

- 1 $y \leftarrow x.right$ // Calcola y
- 2 $x.right \leftarrow y.left$ // Sposta il sottoalbero β
- 3 **if** $y.left \neq T.nil$ // Sistema il riferimento a p della radice di β
- 4 $y.left.p \leftarrow x$
- 5 $y.p \leftarrow x.p$ // Sistema il riferimento al padre del nodo y
- 6 **if** $x.p = T.nil$ // Sistema il riferimento al figlio del padre di y
- 7 $T.root \leftarrow y$
- 8 **elseif** $x = x.p.left$
- 9 $x.p.left \leftarrow y$
- 10 **else** $x.p.right \leftarrow y$
- 11 $y.left \leftarrow x$ // Aggancia x a sinistra di y
- 12 $x.p \leftarrow y$

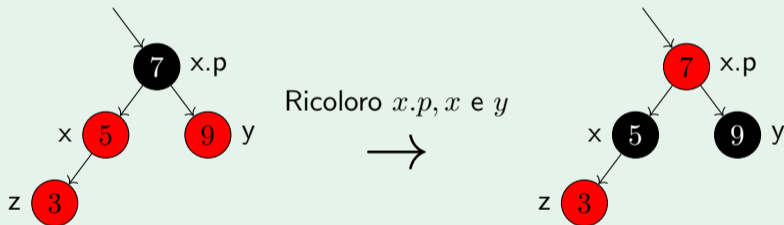
Alberi rosso-neri

Inserimento

- L'inserimento procede ad inserire il nuovo elemento come se l'albero fosse un semplice BST salvo:
 - Assegnare il valore dei sottoalberi del nodo a $T.nil$ al posto di NIL se viene inserito come una foglia
 - Assegnare il valore del genitore del nodo a $T.nil$ al posto di NIL se il nodo è inserito come radice
 - Colorare il nodo appena inserito di rosso
- Possono essere violate la proprietà 4 (i figli di un nodo rosso sono entrambi neri) e la 2 (la radice è nera)
- $RIPARARBINSERISCI(z)$, dato il nodo inserito z :
 - Con $z.p$ figlio sx del nonno di z : 3 casi a seconda del colore dello "zio" e della posizione di z rispetto a $z.p$
 - Simmetrica per il caso in cui il padre è figlio dx del nonno

RIPARARBINSERISCI(z)

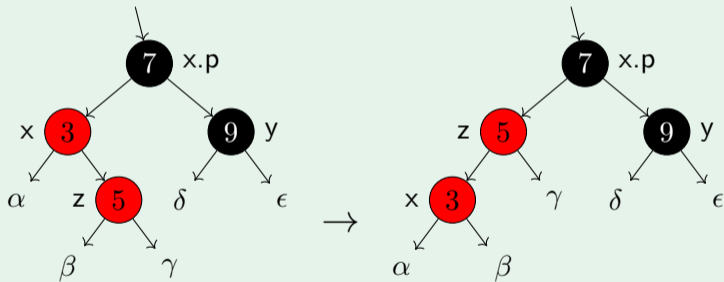
Caso 1 - lo "zio" y è rosso, posizione di z irrilevante, $z.key = 3$



- Successivamente chiamo $RIPARARBINSERISCI(x.p)$: $x.p$ potrebbe avere un padre rosso
- Se $x.p$ è la radice, posso colorarla di nero senza problemi

RIPARARBINSERISCI(z)

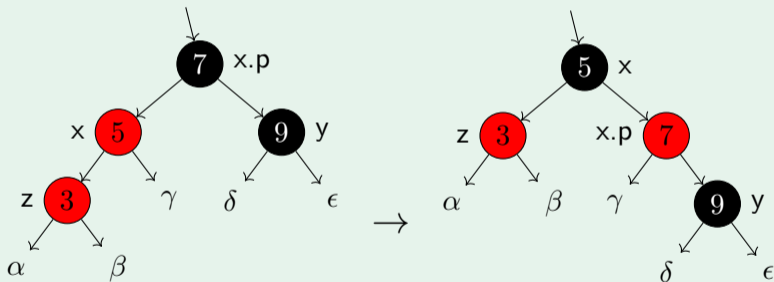
Caso 2 - lo "zio" y è nero, $z = x.right$, $z.key = 5$



- Effettuiamo $LEFTROTATE(T, x)$: ora la riparazione va effettuata su z , con $z.left = x$ rosso (caso successivo)

RIPARARBINERISCI(z)

Caso 3 - lo "zio" y è nero, $z = x.left$, $z.key = 3$



- Scambiamo i colori di x e $x.p$ ed eseguiamo $\text{RIGHTROTATE}(T, p.x)$

Operazioni su alberi RB

RiparaRBInserisci – Pseudocodice

RIPARARBINSERISCI(T, z)

```
1  while  $z.p.color = red$ 
2      if  $z.p = z.p.p.left$ 
3           $y \leftarrow z.p.p.right$ 
4          if  $y.color = red$  // Caso 1
5               $z.p.color \leftarrow black$ 
6               $y.color \leftarrow black$ 
7               $z.p.p.color \leftarrow red$ 
8               $z \leftarrow z.p.p$ 
9          else if  $z = z.p.p.right$  // Caso 2, ruotare  $z$ 
10              $z \leftarrow z.p$ 
11             LEFTROTATE( $z$ )
12              $z.p.color \leftarrow black$  // Caso 3
13              $z.p.p.color \leftarrow red$ 
14             RIGHTROTATE( $z.p.p$ )
15          else // come le righe 3–14, scambiando right con left
16       $T.root.color \leftarrow black$ 
```

Alberi rosso-neri - Inserimento

Analisi di complessità

- Nei casi 2 e 3 la procedura $\text{RIPARARBINERISCI}(z)$ deve solo effettuare un cambio di colori locale e 2 o 1 rotazioni
 - Tutte queste operazioni sono $\mathcal{O}(k)$
- Nel caso 1 continua analizzando il nonno del nodo corrente
 - Caso pessimo: il ciclo itera numero di volte pari a metà dell'altezza dell'intero albero
- L'intera riparazione prende al più $\mathcal{O}(\log(n)) \rightarrow$ l'inserimento, comprensivo di riparazione, in alberi RB è $\mathcal{O}(\log(n))$

Cancellazione

- La cancellazione procede a cancellare il nuovo elemento come se l'albero fosse un semplice BST salvo:
 - l' uso di $T.nil$ al posto di NIL
 - invocare la procedura che ripara eventuali violazioni delle proprietà RB
- Nel caso sia eliminato un nodo rosso, non è necessario alcun cambiamento (non sono possibili violazioni delle proprietà)
- Se il nodo eliminato è nero, $RIPARARBCANCELLA(x)$, dato il nodo x presente al posto di quello cancellato z ripristina le proprietà

Struttura di $\text{RIPARARBCANCELLA}(x)$

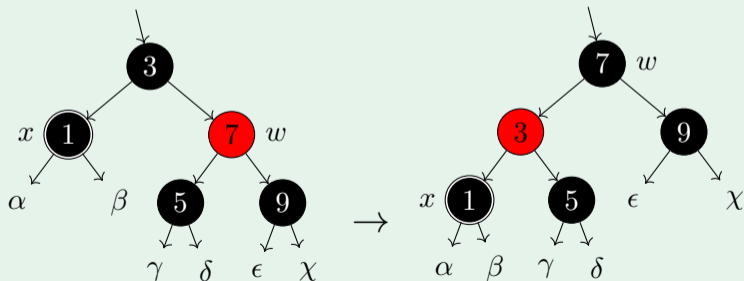
- I 5 casi della procedura $\text{RIPARARBCANCELLA}(x)$, con x figlio sx di $x.p$ (procedura simmetrica se figlio dx) sono:
 - Caso 0: x è rosso
 - Se x è nero
 - Caso 1: Il suo fratello è rosso
 - Se il suo fratello è nero
 - Caso 2: x ha entrambi i nipoti neri
 - Caso 3: x ha entrambi il nipote sinistro rosso
 - Caso 4: x ha entrambi il nipote destro rosso
- La riparazione da effettuare deve sistemare il fatto che x ha un “colore nero aggiuntivo oltre al proprio”: il nero che ha “ereditato” dal nodo cancellato

Alberi rosso-neri

Cancellazione - Caso 0: x è rosso

- Viene colorato di nero: ripristina i valori di bh senza violazioni

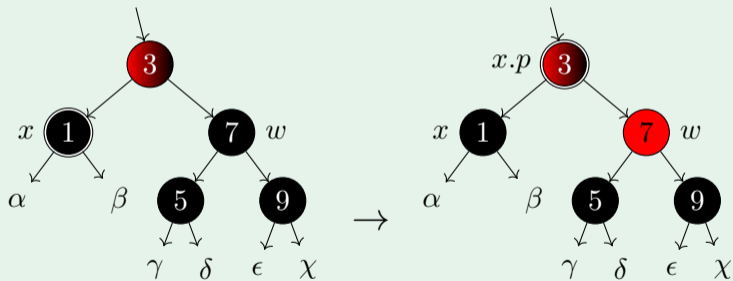
Cancellazione - Caso 1: x è nero, con fratello w rosso ($\Rightarrow x.p$ nero)



Scambio i colori di w e $w.p$; LEFTROTATE($x.p$): x ha fratello w nero: \rightarrow casi 2,3,4

Alberi rosso-neri

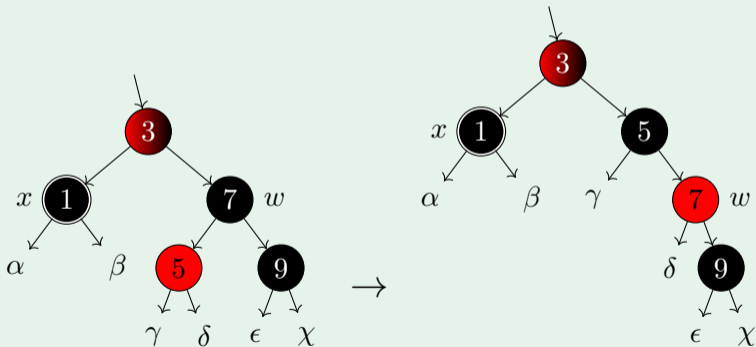
Cancellazione - Caso 2: x è nero, con fratello w nero, e nipoti entrambi neri (n.b. $x.p$ può essere nero o rosso)



Coloro w di rosso (i.e. rimuovo un nero dal sottoalbero) e richiamo
RIPARARBCANCELLA su $x.p$

Alberi rosso-neri

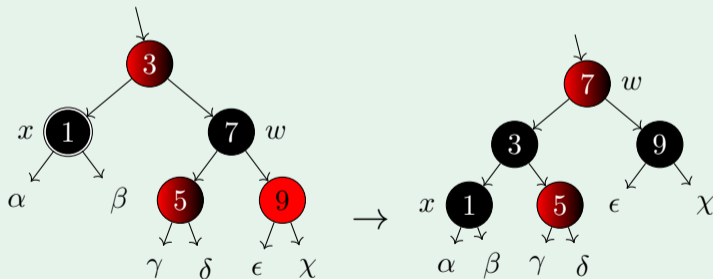
Cancellazione - Caso 3: x è nero, con fratello w nero, e nipote dx nero (n.b. $x.p$ può essere nero o rosso)



Scambio di colore w e $w.left$, RIGHTROTATE su $w \rightarrow$ Caso 4

Alberi rosso-neri

Cancellazione - Caso 4: x è nero, con fratello w nero, e nipote dx rosso (n.b. $x.p$ e $w.left$ possono essere neri o rossi)



w prende il colore di $w.p$, $w.right$ diventa nero. Invoco LEFTROTATE su $w.p$

Operazioni su alberi RB

RIPARARBCANCELLA – Analisi di complessità

- I casi 0,1,3 e 4 di RIPARARBCANCELLA effettuano un numero costante di rotazioni e scambi di colore \rightarrow sono $\mathcal{O}(k)$
- L'unica chiamata ricorsiva è quella che avviene nel caso 2 sul padre di x
 - Nel caso il padre ricada nei casi 0,1,3 o 4, la nuova chiamata termina in $\mathcal{O}(k)$
 - In caso contrario, viene ri-invocata RIPARARBCANCELLA
- Ad ogni chiamata ricorsiva si risale di un livello verso la radice \rightarrow al massimo effettuiamo $\mathcal{O}(\log(n))$ chiamate
- La procedura complessiva di cancellazione da alberi RB è quindi $\mathcal{O}(\log(n))$ come tutte le altre azioni