Automi a stati finiti

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

16 marzo 2020

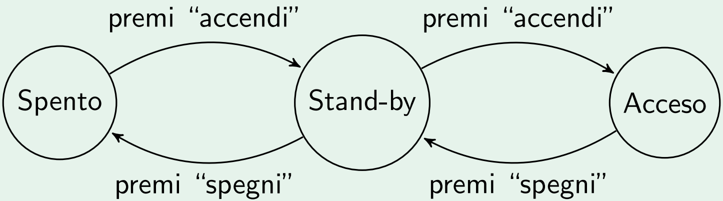
Modelli operazionali

Un semplice modello di calcolo

- I modelli operazionali di calcolo sono definiti come *macchine astratte*
- Modellano il calcolo come una serie di passi discreti da una condizione (*stato*) alla successiva
- Il primo (più semplice) che vediamo sono gli Automi a Stati Finiti (ASF, o Finite State Automata, FSA)
- Gli FSA hanno un insieme finito di stati.
- Esempi: {marce di un'automobile},{fermo, passo, trotto, galoppo}, {in partenza, in viaggio, in arrivo}, $\{1, 2 \ldots, k\}$

Modelli operazionali

Un modello a stati finiti di un televisore



Formalizzazione

Costituenti di un FSA

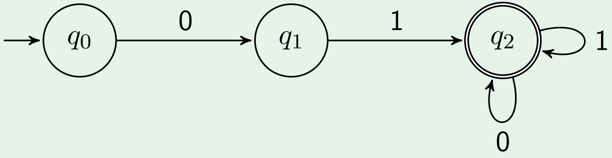
- $\mathbf{Q}$, l'insieme finito dei suoi stati
- $\mathbf{I}$, l'insieme finito (alfabeto) dei simboli in ingresso
- $\delta : \mathbf{Q} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Q}$ la funzione di transizione: mappa una coppia (stato corrente, input) in uno stato di destinazione
- Serve definire un inizio della computazione: chiamiamo $q_0 \in \mathbf{Q}$ lo stato iniziale dell'automa
  - Graficamente si indica con una freccia entrante nello stato iniziale non originata da un altro stato dell'FSA

FSA Riconoscitore

Riconoscere un linguaggio con un FSA

- Possiamo usare un FSA per riconoscere le parole di un linguaggio
- Definiamo l'insieme di stati finali $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{Q}$
- Se l'automa, leggendo una stringa, partendo da q_0 termina in uno stato finale, la stringa appartiene al linguaggio

Riconoscitore per $L = \{$stringhe che iniziano con 01$\}$



Formalizzazione dell'accettazione

Sequenza di mosse

- Formalizziamo una sequenza di mosse definendo $\delta^* : \mathbf{Q} \times \mathbf{I}^* \rightarrow \mathbf{Q}$, estensione di δ induttivamente:
  - **Base**: $\forall q \in \mathbf{Q},\ \delta^*(q, \varepsilon) = q$
  - **Passo**: $\delta^*(q, y.i) = \delta(\delta^*(q, y), i)$

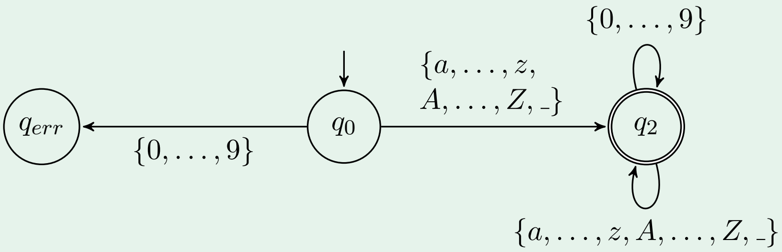
Accettazione di un linguaggio

- Possiamo formalizzare l'accettazione di un linguaggio L su $\mathbf{I}$, da parte di un FSA $(\mathbf{Q}, \mathbf{I}, \delta, q_0, \mathbf{F})$ come

$$x \in L \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \in \mathbf{F}$$

Riconoscitore degli identificatori del linguaggio C

L_{id} definito su $\mathbf{I} = \{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, 0, \ldots, 9, \_\}$

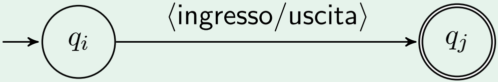


n.b. Arco etichettato con un insieme di n elementi $\rightarrow$ abbreviazione per n archi, uno per ogni simbolo

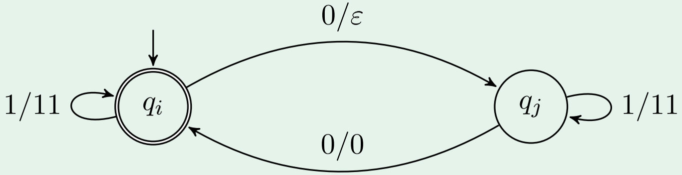
Traduttori

FSA traduttore

- Un FSA traduttore da L_1 a L_2 associa un simbolo letto e uno scritto a ogni transizione



$L_1 \subset \{0,1\}^*$ stringhe con numero di "0" pari, τ : dimezza il numero di "0", raddoppia gli "1"



Formalizzazione di un traduttore

Elementi del traduttore

- Un FSA traduttore: 7-upla $\mathcal{A} : (\mathbf{Q}, \mathbf{I}, \delta, q_0, \mathbf{F}, \mathbf{O}, \eta)$
- $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{I}, \delta, q_0, \mathbf{F} \rangle$ come nell'FSA riconoscitore
- $\mathbf{O}$: alfabeto di uscita
- $\eta : \mathbf{Q} \times \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{O}^*$ funzione di traduzione

Funzione di traduzione per stringhe η^*

- $\eta^* : \mathbf{Q} \times \mathbf{I}^* \rightarrow \mathbf{O}^*$ definita in maniera analoga
  - **Base** $\eta^*(q, \varepsilon) = \varepsilon$
  - **Passo** $\eta^*(q, y.i) = \eta^*(q, y).\eta(\delta^*(q, y), i)$
- L'intero calcolo di traduzione è quindi formalizzato come

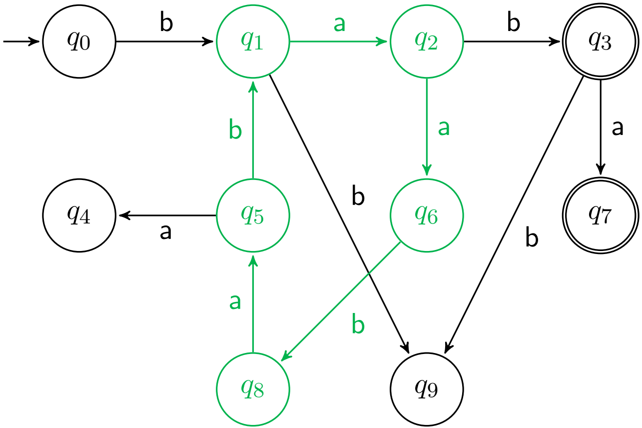
$$\tau(x) = \eta^*(q_0, x) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) \in \mathbf{F}$$

Analisi del modello FSA

Alcune considerazioni

- Modello semplice, ma molto usato
  - E.g.: stati di esecuzione di un processo per il sistema operativo
- Questa semplicità ha un costo?
  - Lo quantificheremo più avanti (alcune calcoli non sono modellabili limitandosi ad un FSA)
- Una prima proprietà fondamentale: il *comportamento ciclico* degli automi a stati finiti

Esempio di ciclo



Esiste un ciclo $\delta^*(q_1, aabab) = q_1$ percorribile $0, 1, 2, \ldots, n$ volte

Formalizzare il comportamento ciclico

Pumping lemma

- Premessa: $\exists x \in L$, L riconosciuto da un FSA, $|x| > |\mathbf{Q}|$
- Conseguenza: esistono $q \in \mathbf{Q}$, $w \in \mathbf{I}^+$ tali che $x = ywz$ con $y, z \in \mathbf{I}^*$ e $\delta^*(q, w) = q$
  - ovvero esiste una sottostringa di x che viene riconosciuta dall'automa effettuando un'iterazione su un ciclo di stati
- Dal pumping lemma consegue che $yw^n z \in L, \forall n \geq 0$
  - Segue dal poter effettuare zero o più iterazioni del ciclo
- Da cui "pumping lemma", posso "gonfiare" il numero di w

Conseguenze del Pumping lemma

Proprietà dei linguaggi riconosciuti da FSA

- Posso dire se $L = \varnothing$
  - $\exists x \in L \Rightarrow \exists y \in L, |y| < |\mathbf{Q}|$: se una parola ha un "ciclo in riconoscimento" lo elimino $\rightarrow$ posso dare in pasto le y all'FSA (sono finite) e verificare se almeno una $\in L$
- Posso dire se $|L| = \infty$
  - $\exists x \in L, |\mathbf{Q}| \leq |x| < 2|\mathbf{Q}|$ implica che x abbia un ciclo in riconoscimento
- N.B. aver un modo, *in generale* (con automi $\neq$ FSA), di dire se $x \in L$ non implica saper rispondere queste due domande

Conseguenze pratiche del Pumping lemma

Proprietà "utili" di un linguaggio

- Mi interessa aver definito un linguaggio (di programmazione, di descrizione dati) consistente di nessuna parola?
- Mi interessa aver definito un linguaggio di programmazione in cui poter scrivere solo un numero finito di programmi?

Limitazioni degli FSA

Riconoscere strutture a parentesi

- $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ è riconosciuto da un FSA?
- Intuizione: no. Dimostriamolo per assurdo
- sia $x \in L, x = a^m b^m, \frac{m}{2} > |Q|$, applicando il pumping lemma abbiamo che $x = ywz$, con w che avere una tra le seguenti forme
  - $w = a^k$, pompando w ottengo $\forall r \in \mathbb{N}, a^{m-k} a^{r \cdot k} b^m \in L$, ↯
  - $w = b^k$, pompando w ottengo $\forall r \in \mathbb{N}, a^m b^{r \cdot k} b^{m-k} \in L$, ↯
  - $w = a^k b^h$, pompando w ottengo $\forall r \in \mathbb{N}, a^{m-k} (a^k b^h)^r b^{m-h} \in L$, ↯

Limitazioni degli FSA

Verso modelli più potenti

- Intuitivamente: per "contare" un n arbitrariamente grande, occorre una quantità di memoria arbitrariamente grande
- Riconoscere strutture a parentesi (HTML,XML,linguaggi di programmazione) non è fattibile da un FSA
- Anche modellare un calcolatore fisico (che è un FSA) come tale può essere scomodo/intrattabile ($2^{2^{44}}$ stati)
- Sarà necessario "estendere" gli FSA per renderli più efficaci

Il concetto di chiusura

Chiusura (algebrica)

- Dati un insieme $\mathbf{S}$, ed un'operazione definita sui suoi elementi si dice che $\mathbf{S}$ è *chiuso* rispetto all'operazione, se il risultato di dell'applicarla ad un elemento di $\mathbf{S}$ è contenuto in $\mathbf{S}$

Esempi

- I numeri naturali (insieme $\mathbb{N}$) sono chiusi rispetto alla somma, ma non rispetto alla sottrazione
- L'insieme dei convogli ferroviari è chiuso per concatenazione

Chiusura nei linguaggi

Chiusura di famiglie di linguaggi

- Chiamiamo famiglia di linguaggi un insieme $\mathbb{L}$ i cui elementi sono linguaggi, $\mathbf{L} = \{L_i\}$
- $\mathbf{L}$ è chiusa rispetto a una generica operazione (binaria) $\star$ se $\forall L_1, L_2 \in \mathbf{L}$ vale $L_1 \star L_2 \in \mathbf{L}$

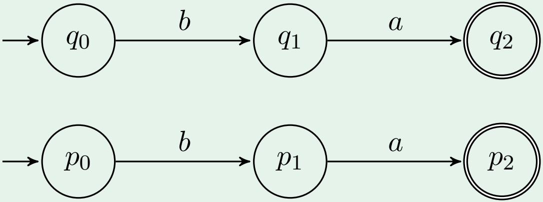
Linguaggi regolari

- La famiglia di linguaggi riconoscibili con un FSA è la famiglia dei linguaggi *regolari*, $\mathbf{R}$ o REG
- $\mathbf{R}$ è chiusa rispetto a $\cup, \cap, \neg, \setminus$, alla concatenazione, a $*$ e $+$

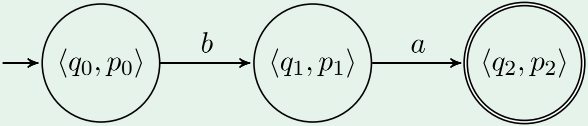
Intersezione tra linguaggi

Combinare gli FSA

Dati due FSA riconoscitori

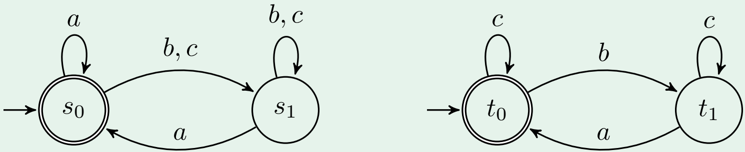


Ottengo il riconoscitore del linguaggio intersezione facendoli funzionare "insieme": è possibile una transizione solo se c'è in entrambi

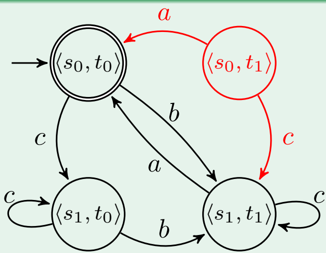


Intersezione: esempio

Automi "sorgente"



Automa intersezione



- Lo stato in rosso non è raggiungibile dallo stato iniziale $\rightarrow$ può essere eliminato
- Con la costruzione a punto fisso a partire da $\langle s_0, t_0 \rangle$ non viene neppure aggiunto

Formalizzazione descrittiva

Chiusura di famiglie di linguaggi

- Dati due automi $\mathcal{A}_1 : (\mathbf{Q}_1, \mathbf{I}_1, \delta_1, q, \mathbf{F}_1)$, $\mathcal{A}_2 : (\mathbf{Q}_2, \mathbf{I}_2, \delta_2, s, \mathbf{F}_2)$ l'automa intersezione $\mathcal{A}_\cap = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ è dato da
  - Insieme degli stati $\mathbf{Q}_\cap = \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2$
  - Alfabeto $\mathbf{I}_\cap = \mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2$
  - Funzione di transizione $\delta_\cap(\langle q_1, q_2 \rangle, i) = \langle \delta_1(q_1, i), \delta_2(q_2, i) \rangle$
  - Insieme degli stati finali $\mathbf{F}_\cap = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$

Correttezza del riconscitore

- Si può dimostrare per induzione sulla lunghezza delle parole che $L(\mathcal{A}_\cap) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$

Unione di linguaggi

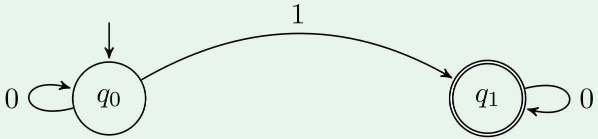
Due soluzioni

- Una prima soluzione è usare una costruzione analoga all'intersezione, ma che ottiene
  - Insieme degli stati $\mathbf{Q}_\cup = (\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) \cup \mathbf{Q}_1 \cup \mathbf{Q}_2$
  - Alfabeto $\mathbf{I}_\cup = \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$
  - $\delta_\cup(\langle q_1, q_2 \rangle, i) =$ $\begin{cases} \langle \delta_1(q_1, i), \delta_2(q_2, i) \rangle & \text{se esistono } \delta_1(q_1, i), \delta_2(q_2, i) \\ \delta_1(q_1, i) \text{ oppure } \delta_2(q_2, i) & \text{altrimenti.} \end{cases}$
  - Insieme degli stati finali $\mathbf{F}_\cup = (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) \cup \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$
- La seconda soluzione è applicare la legge di De Morgan: $L_1 \cup L_2 = \neg(\neg L_1 \cap \neg L_2)$ ed usare intersezione e complemento

Complemento

Costruito operativamente

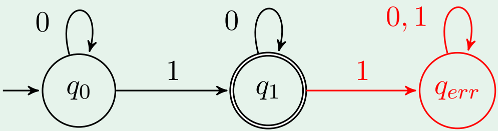
- Idea generale: "rendere finali gli stati non finali e viceversa" $(\mathbf{F}_{compl} = \mathbf{Q} \setminus \mathbf{F})$
- È sufficiente scambiare i ruoli degli stati?



Complemento

Gestire δ parziali

- No. δ è una funzione parziale, negli FSA uno stato non accettante è "implicito": lo stato di errore



- Aggiunto q_{err} nell'FSA, "scambiare $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{F}$" funziona
- Problema non così facile da risolvere con altri modelli di calcolo
- In generale: calcolare la risposta negativa a un quesito non è equivalente a quella positiva.