Strutture dati - Parte 2

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

17 maggio 2023

Alberi

Una struttura dati flessibile

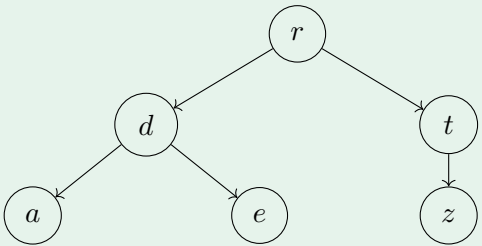
- Una struttura dati versatile è il cosiddetto *albero*
- Ne abbiamo già fatto uso informalmente (limite inferiore complessità dell'ordinamento per confronto)
- In estrema sintesi:
  - Un albero è costituito da un insieme di nodi e uno di archi che li collegano
  - Ogni nodo ha al più un arco entrante, ma un numero arbitrario di archi uscenti
- Gli alberi sono una rappresentazione efficiente per insiemi di dati ordinati

Alberi

Definizione

Un albero A è una coppia $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ dove $\mathbf{V}$ è un insieme di nodi e $\mathbf{E}$ un insieme di archi (coppie di nodi ordinate). Ogni nodo può apparire un'unica volta come destinazione di un arco (= secondo elemento della coppia). Non sono possibili cicli.

Graficamente



- $\mathbf{V} = \{r, a, d, e, t, z\}$
- $\mathbf{E} = \{(r, d), (r, t), (d, a), (d, e), (t, z)\}$

Alberi

Nomenclatura

- **Radice**: É l'unico nodo dell'albero privo di un arco entrante
- **Foglia**: Un nodo senza archi uscenti
- **Padre** (o genitore): di un nodo n: il nodo da cui l'arco entrante in n ha origine
- **Figlio** (o discendente): di un nodo n: il nodo in cui uno degli archi uscenti da n termina
- Un albero in cui ogni nodo ha al più due figli è detto *albero binario*
- Livello: distanza, in numero di archi, di un nodo dalla radice
- Albero completo: un albero a cui non è possibile aggiungere un nodo con livello minore o uguale a quello dei presenti

Alberi binari

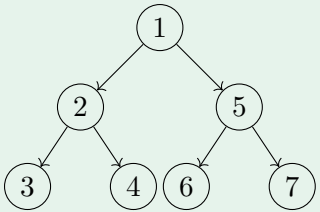
In pseudocodice

- Ci occuperemo di alberi binari (= ogni padre ha 2 figli)
- É utile dare una definizione ricorsiva di albero:
  - Un albero è formato da un nodo radice a cui sono collegati due alberi, il sottoalbero destro e quello sinistro
  - Un albero può essere vuoto (NIL)
- Le azioni sull'albero indicizzeranno i nodi con una chiave
  - Simile a quanto fatto per le tabelle hash, la chiave è un intero
- Dato un nodo `A`:
  - `A.left` è il riferimento al figlio sinistro, `A.right` al destro
  - `A.p` è il riferimento al padre, `A.key` è la chiave
- Ogni albero A ha un riferimento `A.root` alla radice
  - `A.p` è `NIL` solo per la radice

Stoccaggio con struttura dati implicita

Alberi binari stoccati con un vettore

- Un albero può essere materializzato in memoria naturalmente con una struttura basata su puntatori
- Alternativamente è possibile utilizzare un vettore per contenere le chiavi (efficiente se l'albero è completo)



1	2	5	3	4	6	7

- La radice dell'albero è stoccata nella prima posizione del vettore
- Dato un nodo contenuto in posizione i il suo figlio sx è in posizione $2i + 1$, il dx in $2i + 2$ (contando da 0 le pos.
- Il padre del nodo stoccato in posizione i (se esiste) si trova in posizione $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$

Alberi binari

Visita di un albero

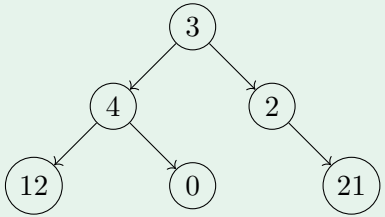
- Su di un albero è possibile effettuare operazioni di inserimento, ricerca e cancellazione di nodi come sulle altre strutture dati
- L'operazione caratteristica degli alberi è il cosiddetto *attraversamento* o *visita* per enumerare le chiavi contenute
- La definizione naturale degli algoritmi di visita è ricorsiva
- Il fattore discriminante tra le diverse strategie è l'*ordine* in cui i nodi vengono visitati

Visita di un albero

Visita *in-ordine* (*in-order*)

- Nella visita in ordine si visita prima il sottoalbero sx, quindi la radice, infine il sottoalbero dx

```
INORDER(T)
1  INORDER(T.left)
2  PRINT(T.key)
3  INORDER(T.right)
4  return
```



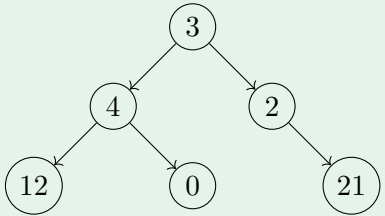
- INORDER dell'esempio stampa: $12, 4, 0, 3, 2, 21$
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

Visita di un albero

Visita *anticipata* (*preorder*)

- Nella visita in ordine si visita prima la radice, quindi il sottoalbero sx, infine il sottoalbero dx

```
PreOrder(T)
1  Print(T.key)
2  PreOrder(T.left)
3  PreOrder(T.right)
4  return
```



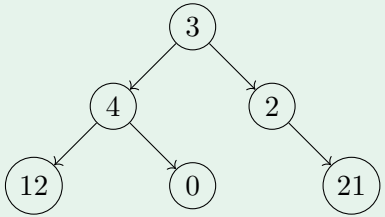
- PreOrder dell'esempio stampa: $3, 4, 12, 0, 2, 21$
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

Visita di un albero

Visita *posticipata* (*postorder*)

- Nella visita in ordine si visita prima il sottoalbero sx, poi il sottoalbero dx e infine la radice

PostOrder(T)
1 PostOrder($T.left$)
2 PostOrder($T.right$)
3 Print($T.key$)
4 **return**



- PostOrder dell'esempio stampa: $12, 0, 4, 21, 2, 3$
- Complessità: $\Theta(n)$, tocca una sola volta ogni nodo

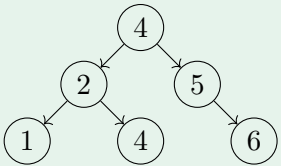
Alberi binari di ricerca (BST)

Definizione

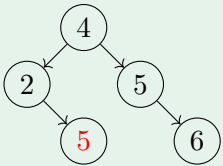
- Uno degli usi più comuni degli alberi binari è utilizzare quelli per cui è valida una data relazione tra le chiavi
- Un albero binario è un *albero binario di ricerca* se per ogni suo nodo x valgono:
  - Se y è contenuto nel sottoalbero sinistro di x, $y.key \leq x.key$
  - Se y è contenuto nel sottoalbero destro di x, $y.key \geq x.key$
- Inserimenti e cancellazioni devono preservare la proprietà
- Una visita in-ordine del BST stampa le chiavi in ordine

Alberi binari di ricerca (BST)

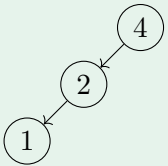
Esempi



É un BST



NON É un BST



É un BST

Nota

- Cambiare la condizione sui valori di chiave rimuovendo la possibilità che siano uguali rende gli elementi del BST unici

Operazioni su BST

Ricerca

- La struttura dei BST li rende naturali candidati per una ricerca efficace degli elementi per chiave

RICERCA(T, x)

```
1  if T = NIL or T.key = x.key
2        return T
3  if T.key < x.key
4        return RICERCA(T.right, x)
5  else return RICERCA(T.left, x)
6
```

- Complessità: $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza dell'albero
- Nel caso ottimo (albero "ben bilanciato") diventa $\mathcal{O}(\log(n))$
- Nel caso pessimo (albero degenere in lista) è $\mathcal{O}(n)$

Operazioni su BST

Minimo e massimo

- L'elemento con chiave minima (massima) è quello più a sinistra (destra) del BST

MIN(T)

```
1  cur ← T
2  while cur.left ≠ NIL
3        cur ← cur.left
4  return cur
```

MAX(T)

```
1  cur ← T
2  while cur.right ≠ NIL
3        cur ← cur.right
4  return cur
```

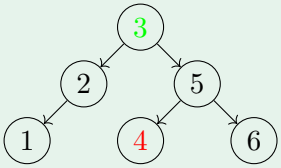
- Complessità: $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza dell'albero

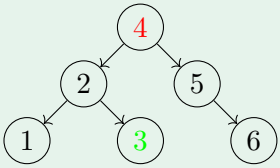
Operazioni su BST

Successore

- Il successore di un elemento x è l'elemento y con la più piccola chiave $y.key > x.key$ presente nel BST
- Nel cercarlo sono possibili due casi:
  1. Il sottoalbero dx di x non è vuoto: il successore è il minimo di quel sottoalbero
  2. Il sottoalbero dx di x è vuoto: il successore è il progenitore più prossimo a x per cui x appare nel suo sottoalbero sx

Esempi: Successore di 3





Operazioni su BST

Successore

- Lo pseudocodice per la ricerca del successore è il seguente:

```
SUCCESSORE(x)
1  if x.right ≠ NIL
2        return MIN(x.right)
3  y ← x.p
4  while y ≠ NIL and y.right = x
5        x ← y
6        y ← y.p
7  return y
```

- Complessità nel caso 1: la stessa del calcolo del minimo: $\mathcal{O}(h)$
- Complessità nel caso 2: caso pessimo, x è la foglia più distante dalla radice, $\mathcal{O}(h)$

Operazioni su BST

Inserimento – Struttura

- L'inserimento di un nuovo elemento deve rispettare la proprietà fondamentale del BST
- Assunzione: non vogliamo che il BST contenga duplicati
- Idea: Cerco l'elemento che voglio inserire nel BST, non lo trovo, lo inserisco al posto del NIL trovato.
- Unica accortezza rispetto al codice della ricerca: tenere traccia dell'ultimo nodo non-NIL per poter inserire correttamente l'elemento

Operazioni su BST

Inserimento – Pseudocodice

INSERISCI(T, x)

```
1   pre ← NIL
2   cur ← T.root
3   while cur ≠ NIL
4         pre ← cur
5         if x.key < cur.key
6               cur ← cur.left
7         else cur ← cur.right
8   x.p ← pre
9   if pre = NIL
10        T.root ← x
11  elseif x.key < pre.key
12        pre.left ← x
13  else pre.right ← x
```

- Le righe 3–7 effettuano la ricerca della posizione di inserimento nell'albero
- Le righe 8–13 effettuano l'inserimento vero e proprio
- Complessità: la stessa della ricerca $\mathcal{O}(h)$ più una porzione a tempo costante (inserimento)

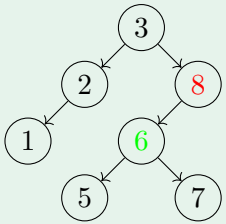
Operazioni su BST

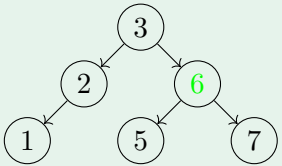
Cancellazione – Struttura – 1

- La strategia di cancellazione di un elemento da un BST dipende dal numero di figli dell'elemento in questione

Caso 1 L'elemento non ha figli: è sufficiente eliminarlo dall'albero deallocandolo e impostando il puntatore del padre a NIL

Caso 2 L'elemento ha un figlio: L'elemento viene sostituito dal figlio nel suo ruolo nell'albero

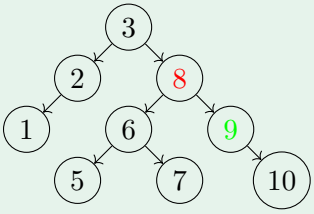




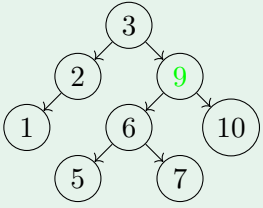
Operazioni su BST

Cancellazione – Struttura – 2

- Caso 3 L'elemento ha due figli: copio il valore del suo successore su di esso ed elimino il successore
- Il successore s di un elemento con due figli x non ha mai il figlio sx f: si avrebbe $s.key < f.key < x.key$, ma questo è impossibile per definizione di successore



Prima



Dopo

Operazioni su BST

Cancellazione – Pseudocodice

CANCELLA(T, x)

```
1  if x.left = NIL or x.right = NIL
2        da_canc ← x
3  else da_canc ← SUCCESSORE(x)
4  if da_canc.left ≠ NIL
5        sottoa ← da_canc.left
6  else sottoa ← da_canc.right
7  if sottoa ≠ NIL
8        sottoa.p ← da_canc.p
9  if da_canc.p = NIL
10       T.root ← sottoa
11 elseif da_canc = da_canc.p.left
12       da_canc.p.left ← sottoa
13 else da_canc.p.right ← sottoa
14 if da_canc ≠ x
15       x.key ← da_canc.key
16 FREE(da_canc)
```

- Le righe 1–3 individuano il nodo da cancellare
- Le righe 4–8 individuano il sottoalbero da spostare e correggono il riferimento al padre
- Le righe 9–13 correggono il riferimento del padre
- Le righe 14–15 copiano il valore della chiave

Analisi di complessità

Sommario

- Tutte le operazioni sono $\mathcal{O}(h)$ con h l'altezza del BST
- Nel migliore dei casi $h = \log(n)$ (albero completo o quasi completo), nel peggiore $h = n$ (lista)
- É critico per avere buone prestazioni mantenere il BST il più possibile vicino al caso ottimo
- Si può dimostrare che l'altezza attesa di un BST è $\mathcal{O}(\log(n))$ se le chiavi inserite hanno distribuzione uniforme
- Volendo un metodo deterministico ci serve una definizione di albero *ben bilanciato*

Albero bilanciato

Vicinanza all'albero completo

- Intuitivamente, vogliamo che la distanza delle foglie dalla radice sia limitata superiormente, per tutte le foglie
- Una definizione operativa (Adelson-Velskii e Landis, 1962)
  - Un albero è bilanciato se, per ogni nodo, le altezze dei due sottoalberi differiscono al più di 1
- Adelson-Velskii e Landis proposero, insieme alla definizione, una modifica ai BST ed ai metodi per accedervi in grado di tenerli bilanciati (alberi AVL)
- Vediamo un'ottimizzazione degli alberi AVL che sacrifica parte del bilanciamento per ottenere inserimenti/cancellazioni più efficienti: gli alberi rosso-neri (red-black trees, RB-trees)
  - Sia la perdita in bilanciamento, che il guadagno sono costanti

Alberi rosso-neri

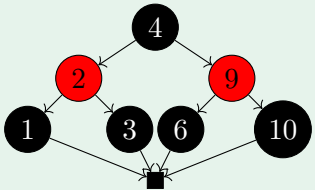
Struttura e definizione

- Un albero rosso-nero è un BST i cui nodi sono dotati di un attributo aggiuntivo, detto *colore* $\in \{rosso, nero\}$, e soddisfacente le seguenti 5 proprietà:
  1. Ogni nodo è rosso o nero
  2. La radice è nera
  3. Le foglie sono nere
  4. I figli di un nodo rosso sono entrambi neri
  5. Per ogni nodo dell'albero, tutti i cammini dai suoi discendenti alle foglie contenute nei suoi sottoalberi hanno lo stesso numero di nodi neri
- Chiamiamo, per comodità, altezza nera (black height) di un nodo x il valore $bh(x)$ pari al numero di nodi neri, escluso x se è il caso, nel percorso che va da x alle foglie

Alberi rosso-neri

Convenzioni

- I dati sono mantenuti unicamente nei nodi interni, le foglie sono tutte NIL
- Per semplicità, tutte le foglie sono fisicamente rappresentate da un singolo nodo, il cui unico riferimento `T.nil` è conservato nella struttura dati
- Il padre del nodo radice punta anch'esso a `T.nil`



Alberi rosso-neri

Azioni sugli alberi rosso-neri

- Tutte le operazioni che non vanno a modificare la struttura dell'albero sono identiche ai BST: RICERCA, MIN, MAX, SUCCESSORE, PREDECESSORE
- Le operazioni di INSERISCI e CANCELLA hanno necessità di mantenere le proprietà degli alberi rosso-neri
  - Idea di massima: opero come se si trattasse di un BST generico, dopodichè compenso le eventuali violazioni
- É necessario essere in grado di ri-bilanciare l'albero con modifiche solamente locali (no ricostruzione dell'albero)

Alberi rosso-neri

Teorema (Proprietà di buon bilanciamento)

Un albero RB con n nodi interni ha altezza massima $2\log(n+1)$

Dimostrazione - 1

- Dim. che un sottoalbero con radice x ha almeno $2^{bh(x)} - 1$ nodi interni, per induzione sull'altezza del sottoalbero
  - Caso base (altezza 0): x è una foglia, il sottoalbero contiene almeno $2^{bh(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ nodi interni
  - Passo: dato x, entrambi i suoi figli hanno altezza nera $bh(x)$ o $bh(x) - 1$. Dato che l'altezza dei figli è minore di quella di x (per hp. ind.) i loro sottoalberi hanno almeno $2^{bh(x)-1} - 1$ nodi interni. L'albero radicato in x contiene quindi almeno $2^{bh(x)-1} - 1 + 2^{bh(x)-1} - 1 + 2 = 2^{bh(x)}$ nodi

Alberi rosso-neri

Dimostrazione.

- Per la proprietà 4, almeno metà dei nodi su un qualunque percorso radice-foglia sono neri
- L'altezza nera della radice è almeno $\frac{h}{2}$; per quanto detto prima il sottoalbero radicato in essa contiene almeno $2^{\frac{h}{2}} - 1$ nodi
- $n \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1$, risolvendo per $h \rightarrow h \leq 2\log(n+1)$ ■

Conseguenze

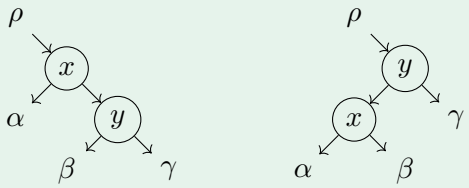
- Le operazioni che restano invariate tra RB-trees e BST (RICERCA, MAX, MIN, SUCCESSORE) sono $\mathcal{O}(2\log(n+1))$
- Se riesco a riparare le violazioni in maniera efficiente ho anche INSERISCI e CANCELLA) in $\mathcal{O}(2\log(n+1))$

Rotazione

Operazione locale a due nodi di un BST che cambia il livello a cui sono situati due nodi senza violare la proprietà BST

$\textsc{LeftRotate}(\mathrm{T},\mathrm{x}) \rightarrow$

$l(\rho) = i - 1$
$l(x) = i$
$l(\alpha) = i + 1$
$l(y) = i + 1$
$l(\beta) = i + 2$
$l(\gamma) = i + 2$



$l(\rho) = i - 1$
$l(x) = i + 1$
$l(\alpha) = i + 2$
$l(y) = i$
$l(\beta) = i + 2$
$l(\gamma) = i + 1$

$\leftarrow \textsc{RightRotate}(\mathrm{T},\mathrm{y})$

Rotazioni

Pseudocodice

LeftRotate(T, x)

```
1  y ← x.right // Calcola y
2  x.right ← y.left // Sposta il sottoalbero β
3  if y.left ≠ T.nil // Sistema il riferimento a p della radice di β
4        y.left.p ← x
5  y.p ← x.p // Sistema il riferimento al padre del nodo y
6  if x.p = T.nil // Sistema il riferimento al figlio del padre di y
7        T.root ← y
8  elseif x = x.p.left
9        x.p.left ← y
10 else x.p.right ← y
11 y.left ← x // Aggancia x a sinistra di y
12 x.p ← y
```

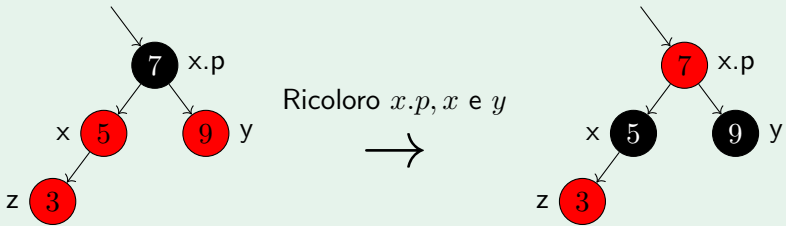
Alberi rosso-neri

Inserimento

- L'inserimento procede ad inserire il nuovo elemento come se l'albero fosse un semplice BST salvo:
  - Assegnare il valore dei sottoalberi del nodo a $T.nil$ al posto di NIL se viene inserito come una foglia
  - Assegnare il valore del genitore del nodo a $T.nil$ al posto di NIL se il nodo è inserito come radice
  - Colorare il nodo appena inserito di rosso
- Possono essere violate la proprietà 4 (i figli di un nodo rosso sono entrambi neri) e la 2 (la radice è nera)
- RiparaRBInserisci(z), dato il nodo inserito z:
  - Con $z.p$ figlio sx del nonno di z: 3 casi a seconda del colore dello "zio" e della posizione di z rispetto a $z.p$
  - Simmetrica per il caso in cui il padre è figlio dx del nonno

RiparaRBInserisci(z)

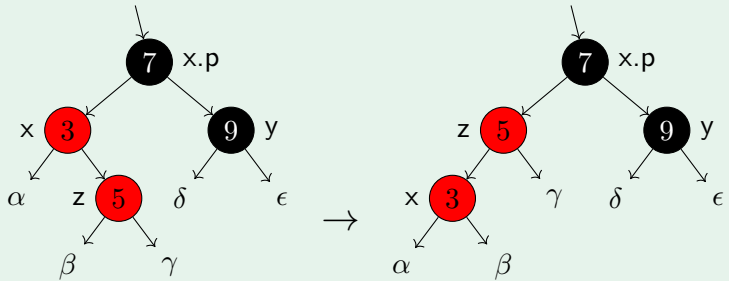
Caso 1 - lo "zio" y è rosso, posizione di z irrilevante, $z.key = 3$



- Successivamente chiamo RiparaRBInserisci($x.p$): $x.p$ potrebbe avere un padre rosso
- Se $x.p$ è la radice, posso colorarla di nero senza problemi

RiparaRBInserisci(z)

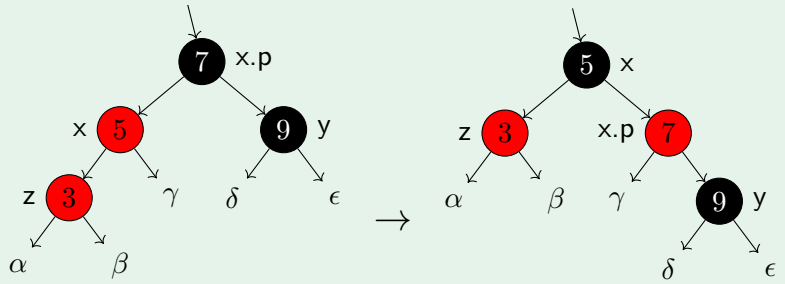
Caso 2 - lo "zio" y è nero, $z = x.right$, $z.key = 5$



- Effettuiamo LeftRotate(T, x): ora la riparazione va effettuata su z, con $z.left = x$ rosso (caso successivo)

RiparaRBInserisci(z)

Caso 3 - lo "zio" y è nero, $z = x.left$, $z.key = 3$



- Scambiamo i colori di x e $x.p$ ed eseguiamo RightRotate($T, p.x$)

Operazioni su alberi RB

RiparaRBInserisci – Pseudocodice

```
RiparaRBInserisci(T, z)
 1  while z.p.color = red
 2      if z.p = z.p.p.left
 3          y ← z.p.p.right
 4          if y.color = red // Caso 1
 5              z.p.color ← black
 6              y.color ← black
 7              z.p.p.color ← red
 8              z ← z.p.p
 9          else if z = z.p.right // Caso 2, ruotare z
10                  z ← z.p
11                  LeftRotate(z)
12              z.p.color ← black // Caso 3
13              z.p.p.color ← red
14              RightRotate(z.p.p)
15      else // come le righe 3–14, scambiando right con left
16  T.root.color ← black
```

Alberi rosso-neri - Inserimento

Analisi di complessità

- Nei casi 2 e 3 la procedura $\textsc{RiparaRBInserisci}(z)$ deve solo effettuare un cambio di colori locale e 2 o 1 rotazioni
  - Tutte queste operazioni sono $\mathcal{O}(k)$
- Nel caso 1 continua analizzando il nonno del nodo corrente
  - Caso pessimo: il ciclo itera numero di volte pari a metà dell'altezza dell'intero albero
- L' intera riparazione prende al più $\mathcal{O}(log(n)) \rightarrow$ l'inserimento, comprensivo di riparazione, in alberi RB è $\mathcal{O}(\log(n)$

Cancellazione

- La cancellazione procede a cancellare il nuovo elemento come se l'albero fosse un semplice BST salvo:
  - l' uso di $T.nil$ al posto di NIL
  - invocare la procedura che ripara eventuali violazioni delle proprietà RB
- Nel caso sia eliminato un nodo rosso, non è necessario alcun cambiamento (non sono possibili violazioni delle proprietà)
- Se il nodo eliminato è nero, $\textsc{RiparaRBCancella}(x)$, dato il nodo x presente al posto di quello cancellato z ripristina le proprietà

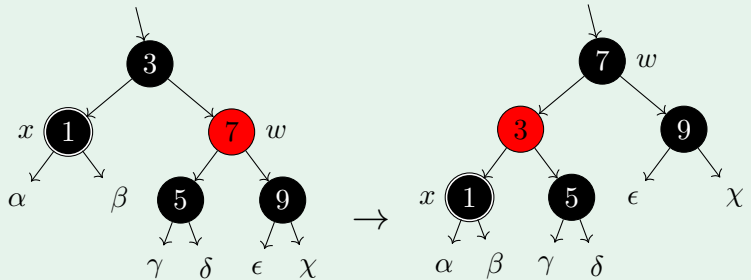
Struttura di RiparaRBCancella(x)

- I 5 casi della procedura RiparaRBCancella(x), con x figlio sx di $x.p$ (procedura simmetrica se figlio dx) sono:
- Caso 0: x è rosso
- Se x è nero
  - Caso 1: Il suo fratello è rosso
  - Se il suo fratello è nero
    - Caso 2: x ha entrambi i nipoti neri
    - Caso 3: x ha entrambi il nipote sinistro rosso
    - Caso 4: x ha entrambi il nipote destro rosso
- La riparazione da effettuare deve sistemare il fatto che x ha un "colore nero aggiuntivo oltre al proprio": il nero che ha "ereditato" dal nodo cancellato

Cancellazione - Caso 0: x è rosso

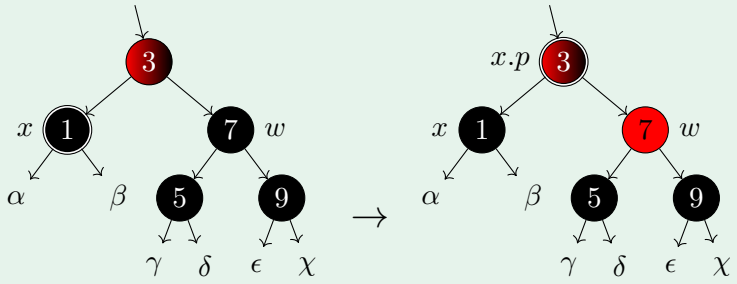
- Viene colorato di nero: ripristina i valori di bh senza violazioni

Cancellazione - Caso 1: x è nero, con fratello w rosso ($\Rightarrow x.p$ nero)



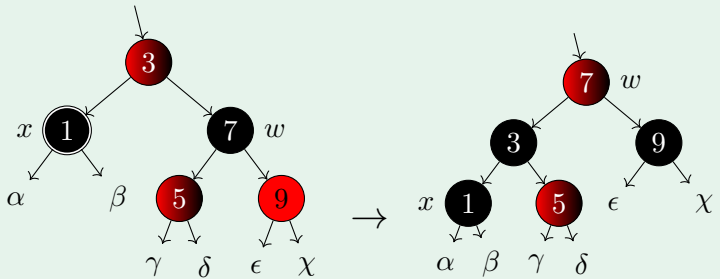
Scambio i colori di w e $w.p$; LeftRotate($x.p$): x ha fratello w nero: $\rightarrow$ casi 2,3,4

Cancellazione - Caso 2: x è nero, con fratello w nero, e nipoti entrambi neri (n.b. $x.p$ può essere nero o rosso)



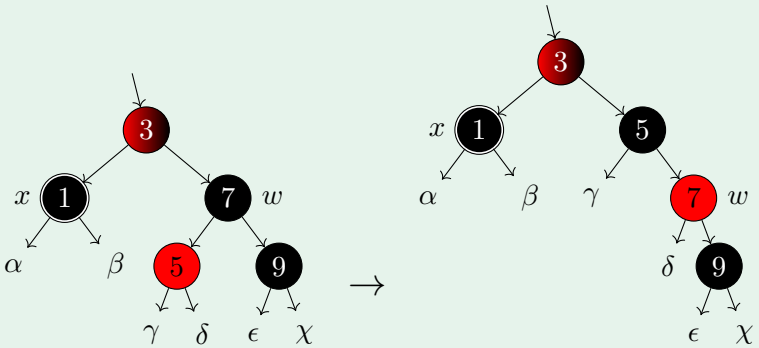
Coloro w di rosso (i.e. rimuovo un nero dal sottoalbero) e richiamo RiparaRBCancella su $x.p$

Cancellazione - Caso 4: x è nero, con fratello w nero, e nipote dx rosso (n.b. $x.p$ e $w.left$ possono essere neri o rossi)



w prende il colore di $w.p$, $w.right$ diventa nero. Invoco LeftRotate su $w.p$

Cancellazione - Caso 3: x è nero, con fratello w nero, e nipote dx nero (n.b. $x.p$ può essere nero o rosso)



Scambio di colore w e $w.left$, RightRotate su $w \rightarrow$ Caso 4

RiparaRBCancella – Analisi di complessità

- I casi 0,1,3 e 4 di RiparaRBCancella effettuano un numero costante di rotazioni e scambi di colore $\rightarrow$ sono $\mathcal{O}(k)$
- L'unica chiamata ricorsiva è quella che avviene nel caso 2 sul padre di x
  - Nel caso il padre ricada nei casi 0,1,3 o 4, la nuova chiamata termina in $\mathcal{O}(k)$
  - In caso contrario, viene ri-invocata RiparaRBCancella
- Ad ogni chiamata ricorsiva si risale di un livello verso la radice $\rightarrow$ al massimo effettuiamo $\mathcal{O}(\log(n))$ chiamate
- La procedura complessiva di cancellazione da alberi RB è quindi $\mathcal{O}(\log(n))$ come tutte le altre azioni