Complessità degli algoritmi

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

24 aprile 2024

Complessità di un algoritmo

Quanto efficientemente risolviamo un problema?

- Dato un problema, un buon flusso di lavoro è:
  1. Concepiamo un algoritmo che lo risolve
  2. Ne valutiamo la complessità
  3. Se la complessità è soddisfacente, lo implementiamo
- Per la correttezza, non c'è una soluzione in generale
  - ... ma questo non nega a priori la possibilità di dimostrarla per dati casi particolari
- Per valutare la complessità ci serve rappresentare l'algoritmo in una qualche forma

Scelta del linguaggio

Pseudocodice

- Semplice linguaggio di programmazione imperativo
- Tralascia gli aspetti non fondamentali per le nostre analisi
- Facilmente traducibile in C/Java/Python/C++
- Sintassi piuttosto asciutta (simile a Python)
- È possibile effettuare analisi di complessità anche su codice scritto in un qualunque linguaggio di programmazione
  - La tecnica resta la stessa dello pseudocodice

Pseudocodice - Sintassi

Procedure, assegnamenti, costrutti di controllo

- Ogni algoritmo è rappresentato con una procedura (= funzione che modifica i dati in input, non ritorna nulla)
- Operatori: Aritmetica a singola precisione come in `C`, assegnamento ($\leftarrow$), e confronti ($<, \leq, =, \geq, >, \neq$)
- Commenti mono-riga con $\triangleright$, blocchi dati dall'indentazione
- Costrutti di controllo disponibili: `while`, `for`, `if-else`
- Tutte le variabili sono locali alla procedura descritta
- Il tipo delle variabili non è esplicito, va inferito dal loro uso

Pseudocodice

Tipi di dato aggregato

- Ci sono gli array, notazione identica al `C`, indici iniziano da 1
- Sono disponibili anche i sotto-array (slices) come in Fortran, Matlab, Python
  - `A[i..j]` è la porzione di array che inizia dall'`i`-esimo elemento e termina al `j`-esimo
- Sono presenti aggregati eterogenei ($=$ strutture `C`)
  - L'accesso a un campo è effettuato tramite l'operatore `.` `A.campo1` è il campo di nome `campo1` della struttura A
  - Diversamente dal C, una variabile di tipo aggregato è un *puntatore* alla struttura
  - Un puntatore non riferito ad alcuna struttura ha valore NIL

Attenzione all'aliasing

$y \leftarrow x$

$x.f \leftarrow 3$ // dopo questa riga anche $y.f$ vale 3

Pseudocodice - Convenzioni

Passaggio parametri

- Il passaggio di parametri ad una procedura viene effettuato:
  - Nel caso di tipi non aggregati: per copia
  - Nel caso di tipi aggregati: per riferimento
- Comportamento identico al C per tipi non aggregati ed array
- Diverso per le strutture (in C sono passate per copia, uguale a quello di Java)

Modello di esecuzione

- Lo pseudocodice è eseguito dalla macchina RAM
- Assunzione fondamentale: un singolo statement di assegnamento tra tipi base è tradotto in un numero costante k di istruzioni dell'assembly RAM

Criteri per l'analisi

Criterio di costo

- Adottiamo il criterio di *costo costante* per l'esecuzione dei nostri algoritmi
  - La maggioranza degli algoritmi che vedremo non ha espansioni significative della dimensione dei singoli dati
  - Se c'è grande espansione consideriamo dati a precisione multipla come vettori di cifre
- Ogni statement semplice di pseudocodice è eseguito in $\Theta(k)$
- Focalizzeremo la nostra analisi sulla complessità *temporale* degli algoritmi
  - È quella che presenta variazioni più "interessanti" a seconda del tipo di soluzione

Una prima analisi

Cancellare un elemento da una collezione di n elementi

- Salvata in un vettore

$\textsc{CancellaElVett}(v, len, e)$

$i \leftarrow 1$
while $v[i] \neq e$ **and** $i < len$
 $i \leftarrow i + 1$
while $i < len - 1$
 $v[i] \leftarrow v[i+1]$
 $i \leftarrow i + 1$
if $i = len$
 $v[i] \leftarrow \perp$

- Salvata in una lista

$\textsc{CancellaElLista}(l, e)$

$p \leftarrow l$
if $p \neq NIL$ **and** $p.value = e$
 $l \leftarrow l.next$
 return
while $p.next \neq NIL$ **and**
  $p.next.value \neq e$
 $p \leftarrow p.next$
if $p.next.value = e$
 $p.next \leftarrow p.next.next$

- Sono entrambi $\Theta(n)$ nel caso pessimo

Un altro esempio

Moltiplicazione di matrici: $dim(A) = \langle n, m \rangle$ $dim(B) = \langle m, o \rangle$

$\textsc{MatrixMultiply}(A, B)$

1 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
2   **for** $j \leftarrow 1$ **to** o
3         $C[i][j] \leftarrow 0$
4   **for** $k \leftarrow 1$ **to** m
5             $C[i][j] \leftarrow C[i][j] + A[i][k] \cdot B[k][j]$
6 **return** C

- La riga 3 viene eseguita $n \cdot o$ volte, la riga 5 viene eseguita $n \cdot m \cdot o$ volte $\rightarrow \Theta(n \cdot m \cdot o)$ (sia nel caso pessimo, che in generale)
- Diventa $\Theta(n^3)$ se le matrici sono quadrate

Ricorsione e complessità

Come calcolare la complessità di algoritmi ricorsivi?

- Ci sono algoritmi con complessità non immediatamente esprimibile in forma chiusa
- Il caso tipico sono algoritmi *divide et impera*:
  - Divido il problema in a sottoproblemi con dimensione dell'input pari a una frazione $\frac{1}{b}$ dell'originale, n
  - Quando n è piccolo a sufficienza, risolvo in tempo costante (caso limite $n = 0$)
  - Ricombino le soluzioni dei sottoproblemi
  - Indichiamo con $D(n)$ il costo del suddividere il problema e con $C(n)$ il costo di combinare le soluzioni
- Esprimiamo il costo totale $T(n)$ con un'*equazione di ricorrenza* (o *ricorrenza*):

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) \text{ se } n < c \\ D(n) + aT(\frac{n}{b}) + C(n) \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Ricorsione e complessità

Come risolvere le ricorrenze?

- Sono possibili 3 tecniche principali:
  - Sostituzione
  - Esame dell'albero di ricorsione
  - Teorema dell'esperto (master theorem)
- Usiamo come caso di studio la ricerca binaria:
  - Formuliamo il problema di cercare in un vettore lungo n come quello di cercare nelle sue metà superiori e inferiori
  - Costo di suddivisione (calcolo indici) costante $D(n) = \Theta(1)$
  - Costo di ricombinazione costante: sappiamo che una delle due metà non contiene per certo l'elemento cercato $C(n) = \Theta(1)$
  - Complessità espressa come $T(n) = \Theta(1) + T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$

Metodo di sostituzione

Ipotesi e dimostrazione

- Il metodo di sostituzione si articola in tre fasi:
  1. Intuire una possibile soluzione
  2. Sostituire la presunta soluzione nella ricorrenza
  3. Dimostrare per induzione che la presunta soluzione è tale per l' equazione/disequazione alle ricorrenze
- Ad esempio, con la complessità della ricerca binaria: $T(n) = \Theta(1) + T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$
  1. Intuizione: penso sia $T(n) = \mathcal{O}(\log(n))$ ovvero $T(n) \leq c\log(n)$
  2. Devo dimostrare: $T(n) = \Theta(1) + T(\frac{n}{2}) + \Theta(1) \leq c \cdot \log(n)$
  3. Considero vero per ipotesi di induzione $T(\frac{n}{2}) \leq c \cdot \log(\frac{n}{2})$ in quanto $\frac{n}{2} < n$ e sostituisco nella (2) ottenendo :
     $T(n) \leq c \cdot \log(\frac{n}{2}) + \Theta(k) = c \cdot \log(n) - c\log(2) + \Theta(k) \leq c\log(n)$

Metodo di sostituzione

Esempio 2

- Determiniamo un limite superiore per $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
- Intuiamo $\mathcal{O}(n\log(n))$, dimostriamo $T(n) \leq c(n\log(n))$
- Supponiamo vero (hp. induzione) $T(\frac{n}{2}) \leq c(\frac{n}{2}\log(\frac{n}{2}))$
- Sostituiamo ottenendo che $T(n) \leq 2c(\frac{n}{2}\log(\frac{n}{2})) + n \leq cn\log(\frac{n}{2}) + n = cn\log(n) - cn\log(2) + n = cn\log(n) + (1 - c\log(2))n$
  - Il comportamento asintotico è quello che vorrei
- Riesco a trovare un n_0 opportuno dal quale in poi valga la diseguaglianza, assumendo che $T(1) = 1$ per definizione?
  - Provo $n_0 = 1$, ottengo $1 \leq 0 + 1 - c\log(2)$, no.
  - Con $n_0 = 3$ funziona, $T(3) = 2 \cdot 1 + 3 \leq 3c\log(3) + (1 - c\log(2))3$

Metodo di sostituzione

Esempio 2 - Un limite più stretto

- Determiniamo un limite superiore per $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$
- Tentiamo di provare che è $\mathcal{O}(n)$, ovvero $T(n) \leq cn$
- Supponiamo vero (hp. induzione) $T(\frac{n}{2}) \leq c\frac{n}{2}$
- Sostituiamo ottenendo che $T(n) \leq 2c\frac{n}{2} + 1 = cn + 1$
  - Non possiamo trovare un valore di c che faccia rispettare l'ipotesi che vogliamo: $cn + 1$ è sempre maggiore di cn
- In questo caso, non siamo riusciti a dimostrare il limite tramite sostituzione
- N.B.: questo *non* implica che $T(n)$ non sia $\mathcal{O}(n)$
  - Prendere come ipotesi $T(n) \leq cn - b$, con b costante, consente di dimostrare che è $\mathcal{O}(n)$

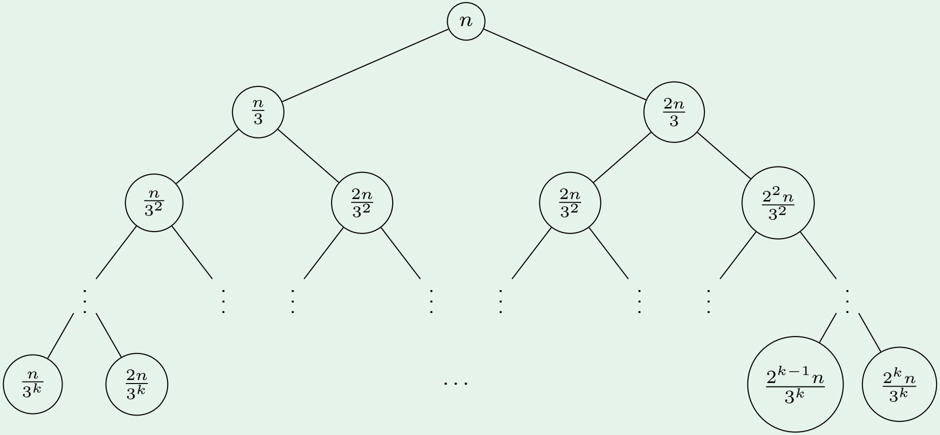
Metodo dell'albero di ricorsione

Espandere le chiamate ricorsive

- L'albero di ricorsione fornisce un aiuto per avere una congettura da verificare con il metodo di sostituzione, o un appiglio per calcolare la complessità esatta
- È una rappresentazione delle chiamate ricorsive, con la loro complessità
- Ogni chiamata costituisce un nodo in una sorta di albero genealogico: i chiamati appaiono come figli del chiamante
- Ogni nodo contiene il costo della chiamata, senza contare quello dei discendenti
- Rappresentiamo l'albero di $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + n$

Metodo dell'albero di ricorsione

Espandendo completamente



Metodo dell'albero di ricorsione

Espandendo completamente

- L'albero ha la ramificazione a profondità massima posta all'estrema destra del disegno precedente
- Sappiamo che essa ha profondità k che ricaviamo ponendo $\frac{2^k}{3^k}n = 1$ (il k-esimo pronipote a dx)
  $\rightarrow 2^k n = 3^k \rightarrow \log_3(2^k n) = k = \log_3(2^k) + \log_3(n) = \log_3(n) + \frac{\log_2(2^k)}{\log_2(3)}$ da cui abbiamo che $(\log_2(3) - 1)k = \log_3(n) \rightarrow k = c \log_3(n)$
- Il costo pessimo per il contributo di un dato livello è l'n del primo livello
- Congetturiamo che $T(n) = \Theta(n \log(n))$
  - Dimostriamolo mostrando che $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$ e $T(n) = \Omega(n \log(n))$

Metodo dell'albero di ricorsione

$T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$

- Per hp. di induzione abbiamo sia che $T(\frac{n}{3}) \leq c_1(\frac{n}{3}\log(\frac{n}{3}))$ sia che $T(\frac{2n}{3}) \leq c_2(\frac{2n}{3}\log(\frac{2n}{3}))$ (dato che $\frac{2}{3}n < n$ e $\frac{1}{3}n < n$)
- Sostituendo abbiamo $T(n) \leq c_1(\frac{n}{3}\log(\frac{n}{3})) + c_2(\frac{2n}{3}\log(\frac{2n}{3})) + n = c_1(\frac{n}{3}(\log(n) - \log(3)) + c_2(\frac{2n}{3}(\log(n) - \log(3) + \log(2))) + c_3 n = c_4 n\log(n) - c_5 n + c_3 n \leq c_4 n \log(n)$ per una scelta opportuna delle costanti c_4, c_5, c_6

$T(n) = \Omega(n \log(n))$

- Hp ind. $T(\frac{n}{3}) \geq c_1(\frac{n}{3}\log(\frac{n}{3}))$, $T(\frac{2n}{3}) \geq c_2(\frac{2n}{3}\log(\frac{2n}{3}))$
- Sostituendo $T(n) \geq c_4 n\log(n) - c_5 n + c_6 n \geq c_4 n \log(n)$

Teorema dell'esperto (Master theorem)

Uno strumento efficace per le ricorsioni

- Il teorema dell'esperto è uno strumento per risolvere buona parte delle equazioni alle ricorrenze.
- Affinchè sia applicabile, la ricorrenza deve avere la seguente forma: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ con $a \geq 1, b > 1$
- L'idea di fondo è quella di confrontare $a^{\log_b(n)} = a^{\frac{\log_a(n)}{\log_a(b)}} = n^{log_b(a)}$ (costo totale delle foglie dell'AdR) con $f(n)$ (il costo della sola radice dell'AdR)
- Le ipotesi del teorema dell'esperto sono le seguenti:
  - a deve essere costante e $a \geq 1$ (almeno 1 sotto-problema per chiamata ricorsiva)
  - $f(n)$ deve essere sommata, non sottratta o altro a $aT(\frac{n}{b})$
  - Il legame tra $n^{log_b(a)}$ e $f(n)$ deve essere polinomiale
- Se queste ipotesi sono valide, è possibile ricavare informazione sulla complessità a seconda del caso in cui ci si trova

Master Theorem

Caso 1

- Nel primo caso $f(n) = \mathcal{O}(n^{log_b(a)-\epsilon})$ per un qualche $\epsilon > 0$
- La complessità risultante è $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$
- Intuitivamente: il costo della ricorsione "domina" quello della singola chiamata
- Esempio: $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
- Confrontiamo: $n^1 = n^{\log_3(9)-\epsilon} \Rightarrow \epsilon = 1 \qquad \checkmark$
- Otteniamo che la complessità è: $\Theta(n^{\log_3(9)}) = \Theta(n^2)$

Master Theorem

Caso 2

- Nel secondo caso abbiamo che $f(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$
- La complessità risultante della ricorrenza è $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)} \log(n))$
- Intuitivamente: il contributo della ricorsione e quello della singola chiamata differiscono per meno di un termine polinomiale
- Esempio: $T(n) = T(\frac{n}{3}) + \Theta(1)$
- Confrontiamo: $\Theta(1) = \Theta(n^{\lfloor log_3(1) \rfloor})$ è vero ?
    - Sì: $\Theta(1) = \Theta(n^0)$ $\checkmark$
- La complessità risultante è $\Theta(n^{log_3(1)} log(n)) = \Theta(log(n))$

Master Theorem

Caso 3

- In questo caso abbiamo che $f(n) = \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon})$, $\epsilon > 0$
- Cond. Necessaria: vale che: $af(\frac{n}{b}) < cf(n)$ per un qualche valore di $c < 1$
- Se le ipotesi sono rispettate, abbiamo che $T(n) = \Theta(f(n))$
- Intuitivamente: il costo della singola chiamata è più rilevante della ricorsione
- Esempio: $T(n) = 8T(\frac{n}{3}) + n^3$
- Confrontiamo $n^3 = \Omega(n^{log_3(8)+\epsilon}) \Rightarrow \epsilon = 3 - log_3(8) > 0 \quad \checkmark$
- Controlliamo se $8f(\frac{n}{3}) = \frac{8}{3^3}n^3 < cn^3$ per un qualche $c < 1$?
  - Sì, basta prendere c in $(1 - (\frac{8}{3^3}); 1) \quad \checkmark$
- La complessità dell'esempio è: $\Theta(n^3)$

Ordinare una collezione di oggetti

Un problema ricorrente

- Tra i problemi che capita più spesso di dover risolvere, l'ordinamento di una collezione di oggetti è un classico
- Un punto chiave dell'utilità dell'ordinamento è consentire di utilizzare una ricerca binaria sulla collezione ordinata
- Analizziamo soluzioni diverse considerando la loro complessità temporale, spaziale e relative peculiarità
- Proprietà di stabilità: in breve, un algoritmo di ordinamento è stabile se non cambia di ordine elementi duplicati

Insertion Sort

Ordinamento per inserimento di interi (ordine crescente)

InsertionSort(A)

for $i \leftarrow 2$ **to** $A.length$
    $tmp \leftarrow A[i]$
    $j \leftarrow i - 1$ // ho salvato l' elemento in $A[j+1]$
    while $j \geq 1$ **and** $A[j] > tmp$
        $A[j+1] \leftarrow A[j]$ // sposto in avanti l' elemento se più grande di tmp
        $j \leftarrow j - 1$
    $A[j+1] \leftarrow tmp$

- Raziocinio: seleziono un elemento e lo reinserisco nella porzione di vettore già ordinato, al suo posto
- $T(n)$: caso ottimo $\Theta(n)$, caso pessimo $\Theta(n^2)$, in gen. $\mathcal{O}(n^2)$. Complessità spaziale $\Theta(1)$. Stabile (usando $>$ non $\geq$).

Più veloce di $\mathcal{O}(n^2)$

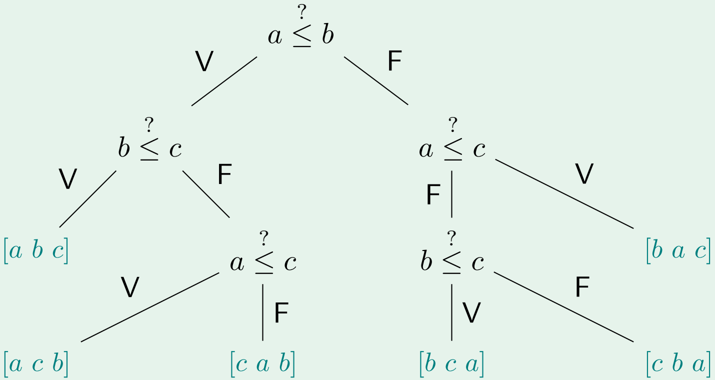
Limiti inferiori della complessità dell'ordinamento

- Abbiamo visto che nel caso pessimo l'Insertion sort è $\Theta(n^2)$
- E'possibile concepire un algoritmo più veloce? Sì
- Qual è il limite di complessità dell'ordinamento per confronto
  - È facile notare che qualunque procedura di ordinamento per n elementi è $\Omega(n)$
  - Sicuramente l'ordinamento è $\mathcal{O}(n^2)$: abbiamo l'insertion sort
- Astraiamo dalla specifica strategia di ordinamento: contiamo le azioni di confronto e scambio

Più veloce di $\mathcal{O}(n^2)$

Limiti inferiori della complessità dell'ordinamento

- Esaminiamo le decisioni per ordinare un vettore $[a\ b\ c]$



Limiti inferiori della complessità dell'ordinamento

Stima del numero di confronti

- L'albero costruito ha tante foglie quante permutazioni del vettore da ordinare
  - Per un vettore lungo n esso ha $n!$ foglie
- Assumiamo che la struttura sia la più compatta possibile
  - non ho confronti ridondanti tra elementi
- La lunghezza del più lungo dei percorsi radice-foglia è il numero max di confronti che devo fare per ordinare un vettore
- L'altezza dell'albero in questo caso è $\log_2$ del numero delle sue foglie $\rightarrow$ $\log(n!) \approx n\log(n) - \log(e)n + \mathcal{O}(\log_2(n))$
- La complessità migliore ottenibile è $\mathcal{O}(n\log(n))$

Merge Sort

Un algoritmo $\Theta(n \log(n))$

- Per avere un algoritmo di ordinamento con complessità di caso pessimo ottima, applichiamo una strategia *divide et impera*
- Suddividiamo il vettore di elementi da ordinare in porzioni più piccole, fin quando non sono ordinabili in $\Theta(1)$, dopodichè ri-assembliamo i risultati ottenuti
  - È importante che ri-assemblare i risultati ottenuti non abbia complessità eccessiva
- Analizziamo quindi la complessità di fondere due array ordinati in un unico array, anch'esso ordinato
  - Consideriamo i due array come slices di un unico array `A`: `A[p..q]`, `A[q+1..r]`

Fusione di `A[p..q]`, `A[q+1..r]` in `A[p..r]`

$\textsc{Merge}(A, p, q, r)$

$len_1 \leftarrow q - p + 1$
$len_2 \leftarrow r - q$
$\textsc{Alloca}(L[1..len_1 + 1])$
$\textsc{Alloca}(R[1..len_2 + 1])$
for $i \leftarrow 1$ **to** len_1 // Copia della prima metà
  $L[i] \leftarrow A[p + i - 1]$
for $i \leftarrow 1$ **to** len_2 // Copia della seconda metà
  $R[i] \leftarrow A[q + i]$
$L[len_1 + 1] \leftarrow \infty; \quad R[len_2 + 1] \leftarrow \infty$ // sentinelle
$i \leftarrow 1; \quad j \leftarrow 1;$
for $k \leftarrow p$ **to** r
  if $L[i] \leq R[j]$
    $A[k] \leftarrow L[i]; i \leftarrow i + 1$
  else
    $A[k] \leftarrow R[j]; j \leftarrow j + 1$

Merge

Analisi di complessità

- L'algoritmo alloca due array ausiliari, grossi quanto le parti da fondere, più alcune variabili ausiliarie in numero fissato
  - Complessità spaziale $\Theta(n)$
- Tralasciando le porzioni sequenziali, l'algoritmo è composto da 3 cicli:
  - Due per copiare le parti da fondere: complessità $\Theta(n)$
  - Uno che copia in A gli elementi in ordine: complessità $\Theta(n)$
- In totale abbiamo che $\textsc{Merge}$ è $\Theta(n)$

MergeSort

Algoritmo

```
MergeSort(A, p, r)
if p < r − 1
    q ← ⌊(p+r)/2⌋
    MergeSort(A, p, q)
    MergeSort(A, q + 1, r)
    Merge(A, p, q, r)
else // Caso base della ricorsione: ho solo ≤2 elementi
    // N.B. se ho 1 elemento non devo fare nulla
    if A[p] > A[r]
        tmp ← A[r]
        A[r] ← A[p]
        A[p] ← tmp
```

- Costo: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$: Caso 2 MT $\rightarrow \Theta(n \ \log(n))$

Quicksort

Un'alternativa divide-et-impera

- Quicksort ordina senza spazio ausiliario (sul posto, o *in place*)
- Quicksort applica il divide-et impera ad una slice `A[lo..hi]`:

Dividi Scegli un elemento `A[p]` (detto pivot) come punto di suddivisione di `A[lo..hi]` e sposta gli elementi di `A[lo..hi]` in modo che tutti quelli di `A[lo..p-1]` siano minori o uguali al pivot

Impera Ordina `A[lo..p-1]`, `A[p+1..hi]` con Quicksort

Combina Nulla! L'ordinamento è eseguito in place

```
Quicksort(A, lo, hi)
if lo < hi
    p ← Partition(A, lo, hi)
    Quicksort(A, lo, p − 1)
    Quicksort(A, p + 1, hi)
```

Quicksort

Schema di partizione di Lomuto

```
PartitionLomuto(A, lo, hi)
pivot ← A[hi]
i ← lo − 1
for j ← lo to hi − 1
      if A[j] ≤ pivot
            i ← i + 1
            Scambia(A[i], A[j])
Scambia(A[i + 1], A[hi])
return i + 1
```

- i indica la posizione dell' ultimo elemento $\leq$ pivot, escluso il pivot stesso
- L' $(i+1)$-esimo elemento è nella sua posizione definitiva dopo PartitionLomuto, posso escluderlo nelle chiamate ricorsive
- Complessità di PartitionLomuto: $\Theta(n)$

Quicksort

Schema di partizione di Hoare

$\text{PartitionHoare}(A, lo, hi)$

$pivot \leftarrow A[lo]$
$i \leftarrow lo - 1; j \leftarrow hi + 1$
while `true`
    repeat
        $j \leftarrow j - 1$
    until $A[j] \leq pivot$
    repeat
        $i \leftarrow i + 1$
    until $A[i] \geq pivot$
    if $i < j$
        $\text{Scambia}(A[i], A[j])$
    else return j

- Effettua $\frac{1}{3}$ degli scambi di Lomuto, in media (asint. $\Theta(n)$)
- N.B. la partizione di Hoare restituisce l'indice dell' ultimo elemento $\leq pivot$ (non necessariamente $= pivot$)
- serve una modifica a Quicksort

$\text{Quicksort}(A, lo, hi)$

if $lo < hi$
    $p \leftarrow \text{PartitionHoare}(A, lo, hi)$
    $\text{Quicksort}(A, lo, p)$
    $\text{Quicksort}(A, p + 1, hi)$

Quicksort

Complessità

- Il calcolo di PARTITION ha complessità temporale $\Theta(n)$, con n la lunghezza del vettore di cui deve operare la partizione
- La complessità dell'intero Quicksort risulta quindi $T(n) = T(\frac{n}{a}) + T(n - \frac{n}{a}) + \Theta(n)$, dove il valore a dipende da quanto "bene" PARTITION ha suddiviso il vettore
- Caso pessimo: il vettore è diviso in porzioni lunghe $n-1$ e 1
  - La ricorrenza diventa $T(n) = T(n-1) + T(1) + \Theta(n)$
  - Si dimostra facilmente che è $\Theta(n^2)$
- Caso ottimo: il vettore è diviso in due porzioni lunghe $\frac{n}{2}$
  - La ricorrenza diventa $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
  - È la stessa del MergeSort, $\Theta(n\log(n))$
- Caso medio: $\Theta(n\log(n))$ e la costante nascosta da Θ è $1,39$

Riassumendo

Un confronto tra ordinamenti per confronto

Algoritmo	Stabile?	$T(n)$ (caso pessimo)	$T(n)$ (caso ottimo)	$S(n)$
Insertion	✓	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$O(1)$
Merge	✓	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(n)$
Quick	$\times$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\Omega(n\log(n))$	$O(1)$

- Non è possibile essere più veloci usando algoritmi di ordinamento *per confronto*
- C'è modo di fare meglio ordinando senza confrontare tra elementi?

Algoritmi non comparativi

Ordinare senza confrontare

- Il vincolo che abbiamo sulla complessità minima è legato al fatto che confrontiamo gli elementi da ordinare *tra loro*
- Nel caso in cui possiamo fare assunzioni sulla distribuzione o sul dominio degli elementi da ordinare, possiamo fare a meno dei confronti!
- Vediamo un esempio di algoritmo di ordinamento senza confronti il *counting sort*
  - Assunzione: il dominio degli elementi è *finito* e di dimensioni "ragionevoli"(dovremo rappresentarlo per esteso)
  - Intuizione: ordino calcolando l'istogramma delle frequenze e stampandone gli elementi in ordine

Counting Sort

Versione non stabile, k valore massimo degli el. di A

Counting-Sort(A)

1 $Ist[0..k] \leftarrow 0$ // Nota: costo $\Theta(k)$
2 **for** $i \leftarrow 0$ to $A.length - 1$
3     $Ist[A[i]] \leftarrow Ist[A[i]] + 1$
4 $idxA \leftarrow 0$
5 **for** $i \leftarrow 0$ to k
6   **while** $Ist[i] > 0$
7         $A[idxA] \leftarrow i$
8         $idxA \leftarrow idxA + 1$
9         $Ist[i] \leftarrow Ist[i] - 1$

- La complessità temporale è dominata dal ciclo alle righe 5–8: $\mathcal{O}(n + k)$
- Se $k \gg n$ la complessità in pratica può essere molto alta

Counting Sort, versione stabile

Versione *stabile*: strategia

- Il counting sort stabile parte con il calcolare il numero delle occorrenze di ogni elemento come quello classico
- A partire dall'istogramma delle frequenze Ist, lo trasforma nel vettore contenente il conteggio degli elementi con valori $\leq$ di quello dell'indice del vettore
- Calcolato ciò, piazza un elemento calcolando la sua posizione come il valore corrente dell'informazione cumulativa contenuta in Ist
- L'informazione cumulativa è decrementata: effettivamente esiste un elemento in meno $\leq$ all'indice del vettore

Counting Sort

Versione *stabile*, out-of-place, k valore massimo degli el. di A

COUNTINGSORT(A)

$B[0..A.length-1] \leftarrow 0$
$Ist[0..k] \leftarrow 0$ // Nota: costo $\Theta(k)$
for $i \leftarrow 0$ to $A.length-1$ // Calcola istogramma
    $Ist[A[i]] \leftarrow Ist[A[i]] + 1$
$\texttt{sum} \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ to k // calcola num. elem. $\leq i$
    $\texttt{sum} \leftarrow \texttt{sum} + Ist[i]$
    $Ist[i] \leftarrow \texttt{sum}$
for $i \leftarrow A.length-1$ to 0
    $idx \leftarrow Ist[A[i]]$
    $B[idx-1] \leftarrow A[i]$
    $Ist[A[i]] \leftarrow Ist[A[i]] - 1$
return B