Macchina di Turing

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

28 febbraio 2024

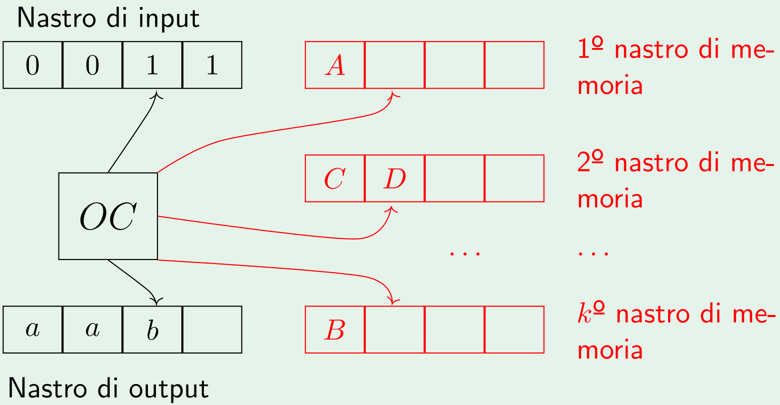
Un modello di calcolo universale

Macchina di Turing

- Gli AP sono più potenti degli FSA (= maggiori capacità riconoscitive), ma mostrano ancora limitazioni
- Esaminiamo un modello di calcolo con maggiori capacità
  - Saremo in grado di effettuare "qualunque" calcolo
  - Esamineremo qual é il costo di questa generalità espressiva
- Il modello è la *Macchina di Turing* (MT) (Alan Turing 1912-1954)
  - Uno dei primi modelli di calcolo: sorprendentemente "semplice" nella sua efficacia
  - Esaminiamo ora il funzionamento come riconoscitore e traduttore, in seguito le proprietà universali del calcolo automatico
- Tra le (due) varianti, esaminiamo prima la MT a k nastri per semplicità

Macchina di Turing

Modello a k-nastri



Descrizione informale

Componenti

- Insieme di stati dell'OC, alfabeto $\mathbf{I}$ e $\mathbf{O}$ come per gli AP
- Ogni nastro di memoria può avere un suo alfabeto dedicato o meno: considereremo un unico alfabeto Γ
- Per convenzione storica e semplicità di formalizzazione, i nastri sono sequenze infinite di celle
  - Solo una quantità finita è inizializzata con un valore sensato
  - Celle restanti contenenti uno spazio vuoto o *blank*: ƀ
- Tutte le testine possono scorrere sui nastri o rimanere ferme
- Configurazione di MT: stato dell'OC e contenuto dei nastri

Transizione della MT

In funzione di ...

- Lettura del carattere sotto la testina del nastro di input
- Lettura dei caratteri sotto le testine dei nastro di memoria
- Stato dell'OC

... azione conseguente

- Cambiamento di stato dell'OC
- Scrittura di un carattere su ogni nastro di memoria
- Scrittura di un carattere sul nastro di uscita
- Spostamento delle testine
  - Testine di memoria e ingresso: 1 posizione a sinistra (`L`), destra (`R`) o ferme (`S`)
  - Testina di output: solo `S` o `R`, se si sposta scrive sempre una lettera o un ƀ

Transizione della MT

Riconoscitore e traduttore

- Transizione $\delta : \mathbf{Q} \times (\mathbf{I} \cup \{\not{b}\}) \times \Gamma^k \to \mathbf{Q} \times \Gamma^k \times \{\mathtt{L}, \mathtt{S}, \mathtt{R}\}^{k+1}$
- Traduzione $\eta : \mathbf{Q} \times (\mathbf{I} \cup \{\not{b}\}) \times \Gamma^k \to (\mathbf{O} \cup \{\not{b}\}) \times \{\mathtt{S}, \mathtt{R}\}$
  - Per quale ragione $\mathbf{O}$ non è meno generale di $\mathbf{O}^*$?

Convenzione grafica

$$\to (p) \xrightarrow{i, \langle A_1, \ldots, A_k \rangle / w, \langle A'_1, \ldots, A'_k \rangle, \langle m_{in}, m_1, \ldots, m_k, m_{k+1} \rangle} (q)$$

- Mossa $m_{in} \in \{\mathtt{L}, \mathtt{S}, \mathtt{R}\}$: testina di input
- Nastri da $i = 1$ a $i = k$ $\to$ memoria, mosse $m_i \in \{\mathtt{L}, \mathtt{S}, \mathtt{R}\}$
- Nastro $k + 1$ $\to$ output, $m_{k+1} \in \{\mathtt{S}, \mathtt{R}\}$

Transizione della MT

Configurazione iniziale

- Tutti i nastri di memoria pieni di ƀ, tranne nella posizione iniziale della rispettiva testina dove c'è Z_0
- Per farvi riferimento, la posizione delle testine conta da 0
- Stato iniziale dell'organo di controllo q_0
- Stringa in ingresso x scritta a partire dalla 0ª cella del nastro di ingresso, seguita e preceduta da ƀ
- Nastro di output riempito con ƀ

Transizione della MT

Configurazione finale e accettazione

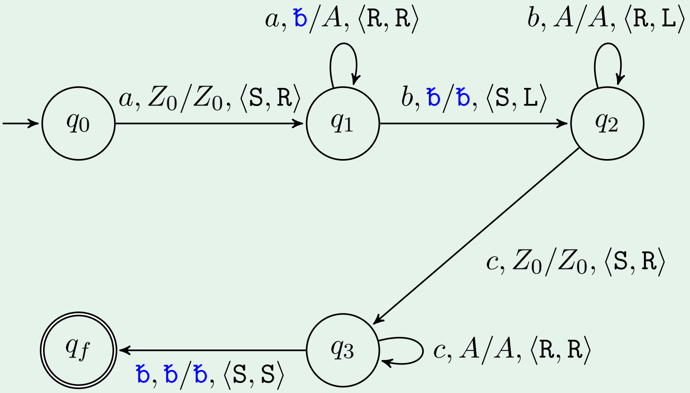
- Stati di accettazione come per FSA, AP: $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{Q}$
- Per comodità (convenzione) la δ, η non è definita a partire dagli stati finali : $\forall q \in \mathbf{F},\ \delta(q, \ldots) = \perp,\ \eta(q, \ldots) = \perp$
- La MT si ferma in uno stato q se $\delta(q, \ldots) = \perp$
- La stringa x in ingresso è accettata se e solo se:
    - In numero finito di transizioni, la macchina si ferma in $q \in \mathbf{F}$

Mancata accettazione

- Una stringa x in ingresso non è accettata se
    - la macchina si ferma in uno stato $\notin \mathbf{F}$
    - *la macchina non si ferma*

MT: esempi

Riconoscere $L = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$



Esempio di traduzione: Incremento di un numero decimale

Schema di funzionamento

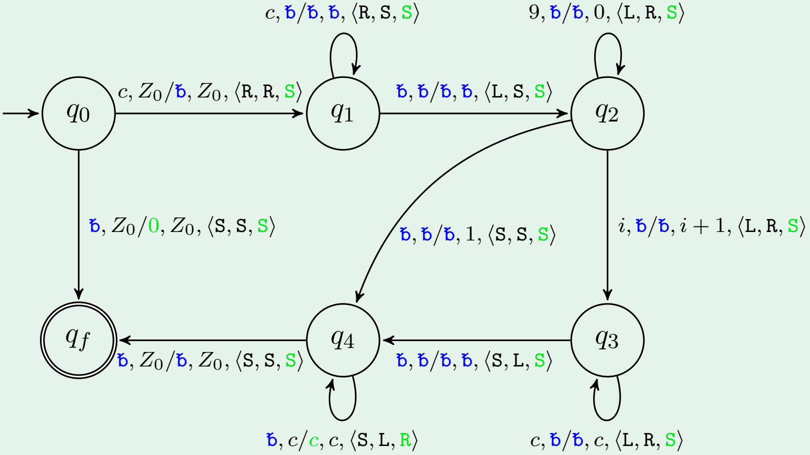
1. Scorri l'input fino alla fine
2. Scorrendo all'indietro l'input, scrivi `0` sul nastro di memoria fino alla prima cifra diversa da 9
3. Scrivi il successore della cifra corrente sul nastro di memoria, dopodichè copia le cifre rimanenti dall'ingresso su di esso
4. Scorrendo al contrario il nastro di memoria, copia le cifre in uscita

Notazione sintetica

1. `i`: una qualunque cifra tra 0 e 8
2. `c`: una qualunque cifra decimale
3. `i+1`: il successore della cifra decimale `i`

MT: esempi

Incrementatore decimale (con $\tau(\varepsilon) = 0$)



Proprietà di chiusura

Valide

- $\cap$: **OK**, una MT che simula l'esecuzione di due "in sequenza"
- $\cup$: **OK**, una MT che simula l'esecuzione di due "in parallelo"
- . (concatenazione): **OK**, simile a $\cap$
- $*$: **OK** vedi concatenazione

Non valide

- Complemento: NO. (Dimostrazione nelle prossime lezioni)
  - Se potessi avere MT infinite-loop-free sarebbe facile: individuo l'insieme degli stati di arresto, lo partiziono in finali e non finali, scambio gli insiemi ed è fatta
  - Il problema è nelle *computazioni che non terminano*

Modelli equivalenti alla MT

Turing completezza

- È possibile costruire modelli di calcolo equivalenti alla MT
  - Una MT con nastro bidimensionale (mosse {N,S,O,E})
  - Una MT con k testine per nastro
  - Un AP con due pile
- Idea generale: per mostrare che sono equivalenti si mettono in corrispondenza biunivoca le transizioni di una MT "classica" a quelle del modello di calcolo proposto
- Se un modello di calcolo può simulare una MT, viene detto *Turing completo*
  - Quasi tutti i linguaggi di programmazione [a]
  - Il meccanismo di risoluzione dei page fault dell'MMU `x86_64`[a]

[a] assumendo memoria infinita

MT a nastro singolo

Nastro singolo $\neq$ 1 nastro di memoria

- Una particolare variante della MT è quella a nastro singolo: input, output e memoria sono tutti sullo stesso nastro
  - È il modello inizialmente ideato da Turing
- È equivalente (=può emulare) una MT a k nastri
  - La posizione delle testine è tenuta usando un carattere speciale sul nastro, e memorizzando il carattere sotto la testina nell'OC
  - Il contenuto dei diversi nastri è delimitato da altri caratteri speciali, si sequenzializzano le operazioni su nastri diversi

MT e modelli di calcolo classico

Differenze con modelli più "realistici"

- Una MT è in grado di simulare il comportamento di una macchina di von Neumann (opportunamente "astratta", con memoria infinita)
- La differenza principale è la modalità di accesso alla memoria
  - Una macchina di von Neumann accede per indirizzo ai dati, mentre una MT scorre il nastro opportuno
  - Nessun cambio a livello di capacità computazionali (= problemi risolvibili)
- Spesso cambiare modello di calcolo ha un significativo impatto in complessità (= tempo/spazio impiegati) del calcolo